Centre d'Économétrie
de la Faculté de Droit
et des Sciences économiques
de Paris
(Association Cournot)

4

E. QUINET

SÉRIES TEMPORELLES ET DÉCISIONS ÉCONOMIQUES

1969

DUNOD

COLLECTION
DU CENTRE D'ÉCONOMÉTRIE
DE LA FACULTÉ DE DROIT
ET DES SCIENCES ÉCONOMIQUES
DE PARIS
ASSOCIATION COURNOT

SÉRIES TEMPORELLES ET DÉCISIONS ÉCONOMIQUES

PAR

E. QUINET

Ingénieur des Ponts et Chaussées
Docteur ès sciences économiques

PRÉFACE DE

H. GUITTON

Professeur à la Faculté de droit
et des sciences économiques de Paris

L'ouvrage se divise en trois parties. Dans la première sont examinés *les modèles en avenir certain.* A l'analyse classique en temps discret, qui conduit à des équations de récurrence, est opposée l'analyse en temps continu, plus satisfaisante pour l'esprit et d'ailleurs facile à mener à l'aide de procédés d'un usage courant dans les sciences de l'ingénieur. Elle permet notamment de prendre conscience de l'importance des délais et décalages dans le comportement des systèmes, comme le montre l'étude de différents modèles globaux de régulation économique.

L'introduction du hasard, objet de la deuxième partie, est présentée d'abord par les méthodes probabilistes classiques, puis par l'analyse spectrale, qui permet notamment de déceler les périodicités cachées des séries temporelles et de mettre en évidence les liens qui unissent entre elles les différentes séries. De nombreuses applications à la désaisonnalisation, à l'étude de la conjoncture et à l'analyse du comportement des chefs d'entreprise, sont présentées et commentées.

Enfin, *les séquences temporelles de décisions* font appel à des traitements différents selon le degré d'incertitude du futur. Les principes de la programmation dynamique sont appliqués à l'élaboration des politiques nationales de croissance optimale et aux décisions à court terme des entrepreneurs.

Voir suite sur le deuxième rabat

DUNOD, ÉDITEUR. PARIS

COLLECTION DU CENTRE D'ÉCONOMÉTRIE DE LA FACULTÉ
DE DROIT ET DES SCIENCES ÉCONOMIQUES DE PARIS
ASSOCIATION COURNOT
dirigée par Henri GUITTON

4

SÉRIES TEMPORELLES ET DÉCISIONS ÉCONOMIQUES

PAR

E. QUINET

Ingénieur des Ponts et Chaussées
Docteur ès-Sciences Économique

PRÉFACE DE

H. GUITTON

Professeur à la Faculté de Droit
et des Sciences économiques de Paris

DUNOD
PARIS
1969

DANS LA MÊME COLLECTION

Ouvrages parus

1. G.L.S. Shackle - Décision, déterminisme et temps.
2. A.H. Hansen - Introduction à la pensée Keynésienne.
3. B. Piganiol - Consommation, épargne et biens durables.
4. E. Quinet - Séries temporelles et décisions économiques.

Sous presse

C. Charmeil - Investissement et croissance économique.

En préparation

T.C. Koopmans - Trois essais sur la science économique contemporaine.
G.S. Stigler - Théorie du prix.
Th. Balogh - Partenaires inégaux dans l'échange international.

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

© DUNOD 1968

Toute reproduction, même partielle, de cet ouvrage est interdite. Une copie ou reproduction par quelque procédé que ce soit, photographie, microfilm, bande magnétique, disque ou autre, constitue une contrefaçon passible des peines prévues par la loi du 11 mars 1957 sur la protection des droits d'auteur.

PRÉFACE

Passé, Présent, Futur, l'esprit humain ne cessera jamais de se représenter ces trois formes du Temps.

Les penseurs grecs, saint Augustin, avaient déjà eu la hantise de ce problème. Certes, on ne pensait pas encore l'économie. Aujourd'hui, où l'analyse économique se constitue et s'affermit de jour en jour, Emile QUINET reprend à son compte ce clivage éternel. L'ouvrage que voisi en est un témoignage.

J'ai eu beaucoup de joie à suivre Emile QUINET dans ses recherches, dans ses tâtonnements, dans ses décisions pour construire et rédiger ce livre. Ensemble nous avons travaillé. J'ai pensé, depuis de longues années, que les anciens élèves des grandes écoles scientifiques, lorsqu'ils sentaient s'éveiller en eux la vocation économique pouvaient être des privilégiés, et c'est pourquoi je me suis efforcé de les accueillir, de les aider dans la mesure de mes moyens. Le Centre d'Econométrie de la Faculté de Droit et des Sciences économiques de Paris était un terrain d'accueil tout trouvé.

Emile QUINET sortait donc de l'Ecole polytechnique, ingénieur des Ponts et Chaussées, mais attiré par les sciences humaines il avait suivi le cycle de nos études de Faculté ainsi que celui de l'Institut d'Etudes politiques.

Il travaillait au Laboratoire d'Econométrie de l'Ecole polytechnique. La rue Descartes est heureusement proche de la rue Cujas.

Emile QUINET a fréquenté quelques-uns de nos séminaires d'études, notamment celui dirigé par M. BARBUT sur l'analyse des séries temporelles. Le jeudi nous nous rencontrions, et de ces premières causeries a surgi l'idée de cette thèse. Elle devait d'abord porter uniquement sur l'analyse spectrale, que nous connaissions si mal dans nos Facultés et dont nous sentions et la difficulté et l'intérêt. Le temps s'écoulait.

Emile QUINET ne voulait pas nous donner un travail de pure technique, mais il a toujours manifesté une discrétion et une modestie qui me frappaient. Ces qualités du vrai chercheur s'alliaient aussi à une sûreté de pensée. Il a senti qu'il pouvait, qu'il devait nous donner davantage. C'est ainsi que la philosophie du temps s'est introduite dans son entreprise, et que, de mois en mois, l'objectif s'est élargi, précisé, j'allais même dire épanoui. C'est

un ouvrage sur la prévision, sur la connaissance du futur, sur la création de l'avenir, qui a finalement pris corps, et qui aujourd'hui voit le jour.

Emile QUINET est mathématicien, mais un mathématicien plein de douceur qui jamais ne veut affoler ou écraser son interlocuteur de ses connaissances, de formules ou de graphiques.

J'aime à souligner les articulations plus précises de sa progression. Il part du déterminisme classique qui a commandé nos premiers modèles calqués sur ceux de la physique. Cette première partie est déjà éclairante, quoique non originale. Il s'agissait de mettre en ordre l'enseignement traditionnel encore régnant : les systèmes linéaires en temps continu et les systèmes non linéaires. Dans ce genre l'esprit se laisse aller à déterminer, dans la perfection de la logique, les événements. Le temps est alors absent ou dominé. Mais comme la réalité n'est ni linéaire, ni continue, ni certaine, elle ressemble de loin au portrait que l'on en trace.

La construction propre commence avec la deuxième partie. Le morceau de résistance est intitulé : *Le présent déterminé imparfaitement par le passé; la prise en compte du hasard.* Voici l'analyse des aléas, la place qu'ils tiennent dans l'analyse dynamique. C'est à ce moment qu'Emile QUINET nous fait entrer avec lui dans le laboratoire. Nous suivons le technicien dans l'étude de la régression linéaire sur séries chronologiques : l'aléa y est compris comme une sorte de variable fourre-tout. Je préfère le traitement des processus aléatoires où nous retrouverons le modèle à deux aléas de nos amis MORLAT et BACHELET, et cette fameuse analyse spectrale qui, nous l'avons dit, a constitué le point de départ de l'ouvrage. Ce chapitre rendra d'immenses services à nos étudiants.

Dans une dernière partie, c'est une sorte de synthèse qui est opérée. *Le présent lié à la fois au passé et au futur.* Emile QUINET reprend à son compte les analyses actuelles relatives au risque, à l'incertitude, et aux outils fournis par la théorie de la décision dont il fait application à quelques problèmes économiques contemporains.

Je voudrais signaler l'intérêt du chapitre 8 où l'auteur nous initie à une méthode qu'il a lui-même mise sur pied, et appliquée en collaboration avec J. MÉRAUD, l'un des Maîtres français de la prévision. Je crois cette méthode particulièrement féconde, et j'en recommande l'étude à tous ceux qui se préoccupent de prévision. Il s'agit de l'ajustement entre prévision et réalisation de demandes issues des résultats du test conjoncturel français, et des relations entre coefficient de corrélation et coefficient de régression. Je crois cette méthode riche de possibilités futures.

Nous louons en la matière l'enseignement du Maître hollandais Henri THEIL. L'apport d'Emile QUINET est de la même veine.

Il utilise de la meilleure manière qui soit ce qu'il appelle lui-même l'investissement intellectuel et ce « réservoir de logique » qui constituent les mathématiques.

Je ne saurais enfin mieux terminer ces lignes qu'en citant la phrase que je trouve la mieux venue de tout l'ouvrage : « le temps économique est donc en quelque sorte un halo qui entoure l'instant présent et devient de plus en plus flou à mesure qu'on s'en éloigne... notre univers temporel réside tout entier dans ce halo, qui filtre le réel et le reproduit à la mesure de notre esprit, un passé déformé et amputé se combine à un ensemble de souhaits et d'intentions qui le transforment en une image inachevée du futur où se préfigure notre action ».

Henri Guitton
Professeur à la Faculté de Droit
et des Sciences économiques de Paris.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41549908_0010

AVANT-PROPOS

« Séries temporelles et décisions économiques » : voilà un domaine bien vaste, et l'auteur paraîtrait certainement téméraire de s'y être engagé, s'il ne reconnaissait auparavant les aides dont il est redevable, les influences subies, éclairant ainsi le lecteur sur ses motifs et ses buts.

Sa gratitude va en premier lieu à M. le Professeur H. Guitton, qui a fourni l'idée initiale et a ensuite animé toutes les phases de son élaboration; c'est lui qui, par ses écrits, son enseignement et à l'occasion de conversations, a fait sentir à la fois l'intérêt d'une analyse dynamique moderne, et les difficultés qu'elle présentait.

Une première vue concrète des problèmes que posent les séries chronologiques fut donnée à l'occasion d'études, menées sous la direction éclairée de MM. J. Dumontier et J. Méraud; ces études portaient sur la conjoncture et sur le comportement à court terme des chefs d'entreprises, et leur support statistique essentiel était constitué par les tests conjoncturels.

A la même époque M. M. Barbut animait, dans le cadre de l'Association Cournot, un séminaire sur l'analyse mathématique des chroniques, auquel participaient MM. H. Guitton et C. Fourgeaud; les séances étaient l'occasion d'exposés sur les recherches récentes, et l'accent portait principalement sur l'apport de la théorie de la décision pour l'explication des phénomènes temporels.

Cet environnement était donc particulièrement propice à une réflexion sur l'introduction du temps en économie et sur son étude quantitative par l'intermédiaire de séries temporelles. On dispose en effet à cet égard d'une grande variété de méthodes, parfois fort complexes à mettre en œuvre, et entre lesquelles le choix n'est pas aisé. D'où l'idée d'essayer de les classer, en dégageant leur domaine d'application pour l'économie, et en s'efforçant de mettre au jour les principes de base, souvent très simples, qui les sous-tendent.

Il en est résulté une thèse, profondément marquée par l'empreinte de son président, M. H. Guitton qui n'a cessé de prodiguer à l'auteur ses encouragements et ses conseils avisés, et d'où cet ouvrage est directement issu, après avoir largement bénéficié des remarques et suggestions du Jury, composé, outre M. H. Guitton, de MM. R. Barre et B. Ducros.

Par ailleurs M. J. Ullmo a eu l'amabilité de faire part de ses réactions au texte initial, et est à la source de sensibles améliorations.

En outre, M. C. Charmeil, au cours de nombreuses conversations, a fait profiter de ses connaissances en matière de calcul économique et de programmation dynamique.

Enfin, la Société d'Economie et de Mathématiques Appliquées, et spécialement MM. C. Goux, D. Bachelet et B. Bechetoille ont été d'une grande aide en matière d'analyse spectrale, tant sur le plan de la documentation bibliographique que sur celui de l'accès aux moyens de calculs électroniques.

Proposer à cet ouvrage une vocation de synthèse pourrait sembler ambitieux, s'il avait été au préalable reconnu tout ce qu'il doit à ceux qui viennent d'être cités.

Quelques précisions sur le titre lui-même; il est constitué du rapprochement de deux expressions :

« Séries temporelles », il s'agit de l'analyse quantitative du temps; ce n'est pas un ouvrage de mathématiques, et on s'est efforcé de le rendre le plus clair et le plus simple possible à cet égard. Les mathématiciens n'y trouveront guère de résultats qu'ils ne connaissent, ils pourront même parfois se plaindre de l'absence de démonstration. Toutefois, l'outil mathématique est d'une telle puissance et d'un tel intérêt qu'il a paru impossible de ne pas en faire une large utilisation.

« Décisions économiques » ; ces termes y figurent pour deux raisons : tout d'abord une place importante est accordée aux chaînes temporelles de décisions, car ce sont elles qui animent plus ou moins explicitement la majorité des analyses de dynamique économique. Mais aussi, on désire marquer les liens étroits qui existent entre la théorie et l'action; il n'y a pas deux sciences économiques, l'une visant à décrire, l'autre à prescrire, mais toute analyse théorique aboutit à des décisions, de même qu'aucune action raisonnée ne peut être fondée sans formalisation abstraite; on s'efforcera d'ailleurs de faire sentir cette double nécessité tout au long des développements qui vont suivre, en étayant chaque raisonnement théorique par des applications au plan pratique, et par des illustrations au niveau de l'action économique.

TABLE DES MATIÈRES

Page

INTRODUCTION 1

PREMIÈRE PARTIE : Le présent engendré par le passé; le déterminisme classique 9

Chapitre 1 : Comparaison entre modèles déterministes physiques et économiques 13

Section 1 : Les analogies entre mécanismes économiques et mécanismes physiques . . . 15

Section 2 : Les différences entre mécanismes économiques et mécanismes physiques . . . 16

Chapitre 2 : Les systèmes linéaires en temps continu 22

Section 1 : Les mécanismes de base des systèmes linéaires 22

Section 2 : La combinaison des mécanismes de base . 26

Section 3 : Deux applications des méthodes précédentes 32

§ 1 : L'oscillateur de Samuelson . . . 32

§ 2 : La régulation des cycles par la politique budgétaire 40

Chapitre 3 : Les systèmes non linéaires 46

Section 1 : Les sources de non linéarité. 46

Section 2 : Deux exemples de modèles non linéaires . 48

§ 1 : Le modèle de Goodwin 48

§ 2 : Le modèle de Hicks 52

DEUXIÈME PARTIE : Le présent déterminé imparfaitement par le passé : la prise en compte du hasard 55

Chapitre 4 : Les aléas et leur place dans l'analyse dynamique . . 59

Section 1 : Les différents types d'aléas 59

§ 1 : L'aléa, erreur de mesure 59

§ 2 : L'aléa, écart par rapport à une loi . 60

Section 2 : Le rôle des aléas dans l'analyse dynamique 61

§ 1 : La théorie du revenu permanent . 61

§ 2 : La théorie des chocs erratiques . . 62

§ 3 : L'effet Slutsky 65

Chapitre 5 : La régression linéaire sur séries chronologiques . . 68

Section 1 : Les limites de la régression 68

§ 1 : Les limites d'ordre statistique . . 69

§ 2 : Les limites du pouvoir explicatif . 71

Section 2 : Application à la désaisonnalisation des séries chronologiques. 76
Section 3 : Application à la prévision du parc de véhicules automobiles 84

Chapitre 6 : Un exemple de traitement des processus aléatoires : l'analyse spectrale. 86
Section 1 : Les processus stationnaires 87
Section 2 : Représentation graphique et estimation des spectres 92
Section 3 : Quelques applications de l'analyse spectrale aux séries économiques 97
§ 1 : L'étude des procédures de désaisonnalisation 98
§ 2 : L'analyse spectrale et les mouve-conjoncturels 102
§ 3 : L'étude des fluctuations longues. . 109
§ 4 : L'analyse spectrale et l'étude des réactions à court terme des chefs d'entreprises 111

TROISIÈME PARTIE : Le présent lié à la fois au passé et au futur; prévision et décision économiques 135

Chapitre 7 : La prise en compte du futur : quelques aspects de la théorie de la décision 139
Section 1 : Les différents degrés dans la connaissance du futur 139
§ 1 : La connaissance parfaite 140
§ 2 : Le risque 140
§ 3 : L'incertitude 140
Section 2 : Les outils fournis par la théorie de la décision 141
§ 1 : Les décisions isolées 141
§ 2 : L'enchaînement des décisions dans le temps 148
Section 3 : L'application des outils de la théorie de la décision à l'analyse économique . . . 152
§ 1 : Les modèles de la croissance multisectoriels 152
§ 2 : Un modèle simple de croissance à un seul secteur 158
§ 3 : La théorie de la décision en économie appliquée : le choix des investissements routiers 168

Chapitre 8 : La prise en compte du futur : les mécanismes réels de prévision et de décision 175
Section 1 : Comportement optimal et comportement de fait 176
§ 1 : La théorie des jeux décrit-elle correctement les comportements de fait ? . 176

§ 2 : Les processus d'apprentissage . . 178
§ 3 : La formation psychologique des décisions selon Shackle 185
Section 2 : Une analyse des projections à court terme des agents économiques 187
§ 1 : La formation des prévisions . . . 188
§ 2 : L'utilisation des prévisions pour les décisions de production à court terme 206
Section 3 : Les prévisions et décisions à long terme : la prospective 220

CONCLUSION 223

ANNEXES :

Annexe I : Quelques éléments pour l'étude mathématique des systèmes linéaires 226
Annexe II : Note sur la représentation des oscillations sinusoïdales 233
Annexe III : Notions d'analyse spectrale 235
Annexe IV : Données numériques utilisées au cours du Chapitre 8 . 240

BIBLIOGRAPHIE 249

INTRODUCTION

La dynamique économique est restée longtemps étouffée par le succès des analyses statiques de l'époque classique; mais son développement, assez récent puisqu'il ne date que de quelques décades, n'en a été que plus rapide. Depuis l'entre-deux guerres on assiste à un foisonnement de recherches visant à intégrer le temps dans les analyses économiques, que ce soit au niveau de schémas explicatifs, d'études descriptives s'appuyant sur des données concrètes, ou de la recherche de règles d'action à l'usage des gouvernements ou des particuliers.

Il n'est donc pas étonnant que cet essor s'accompagne d'une grande diversité de méthodes, souvent d'une haute technicité mathématique et dont les domaines d'application n'apparaissent pas clairement de prime abord; et il n'est pas sans intérêt de s'efforcer de dégager les principes logiques fondamentaux et les attitudes intellectuelles de base qui animent ces méthodes.

Toutefois, avant d'aborder cette étude, il sera nécessaire de montrer en quoi l'introduction du temps conduit à envisager des procédures radicalement différentes de celles qui sont utilisées dans les analyses qui ne le contiennent pas; ce sera l'objet de la première section.

Enfin le titre choisi, qui comporte l'expression « séries temporelles » implique en faveur de l'utilisation des mathématiques une option importante qui sera justifiée dans la 2e section.

Il sera alors possible dans une 3e section de définir le plan d'ouvrage.

1) Spécificité de la dynamique

La dynamique s'efforce de retracer la succession des phénomènes; elle s'attache à leurs liens mutuels dans le temps. C'est ainsi que pour H. Guitton, une théorie est véritablement dynamique « à partir du moment où elle se préoccupe de rechercher des liaisons entre des grandeurs décalées dans le temps, c'est-à-dire dont les dates ne sont pas concordantes, c'est-à-dire encore qui appartiennent à des époques différentes, soit en retard, soit en avance, les unes par rapport aux autres » (1). De même R. Barre (2) écrit : « l'essentiel de la théorie dynamique réside dans la succession des événements dans le temps et de leurs enchaînements » et précise : « un système dynamique sera celui dans lequel la valeur prise à un moment du temps par une

(1) H. Guitton, *Les fluctuations économiques* (1951).
(2) R. Barre, *La période dans l'analyse économique* (1950).

variable du système est déterminée pour partie ou pour le tout par les valeurs prises par cette variable et (ou) d'autres variables à certain moment du passé ».

Précisons cela par un exemple tiré de la détermination de la consommation globale; la consommation de l'année courante dépend évidemment du revenu actuel mais également des revenus et des consommations passés qui ont engendré des souvenirs dans l'esprit des agents économiques. Ces souvenirs seront probablement plus vifs pour le passé récent, mais ils peuvent dépendre du caractère plus ou moins exceptionnel des années antérieures; si, dans le passé, les revenus ont connu une progression forte et continue, il est probable que la consommation présente restera élevée, même si le revenu courant baisse; mais ceci peut également se produire dans le cas où les revenus n'ayant progressé que modérément, la consommation est restée, pour une cause quelconque, en retard sur eux, et rattrape actuellement ce retard. Si à l'équilibre, la consommation est déterminée par le revenu selon une relation du type :

$$C = f(R),$$

la relation dynamique correspondante est bien plus complexe, car la consommation dépendra bien toujours du revenu présent, mais également de tous les revenus passés et de toutes les consommations passées, qui auront marqué les modes de vie des individus :

$$C_t = g(R_t, R_{t-1}, R_{t-2}, \dots C_{t-1}, C_{t-2}, \dots).$$

Ce qui intervient alors dans le raisonnement mathématique, ce n'est plus une fonction d'une variable, c'est une fonction d'une infinité de variables, ce qu'on appelle une fonctionnelle :

$$C_t = g\left(\frac{R(\theta)}{\theta \leqslant t}, \frac{C(\theta)}{\theta < t}\right).$$

Aux équations dont les inconnues étaient des nombres se substituent des équations dont les inconnues sont des fonctions.

On doit se garder évidemment de pousser trop loin de telles analogies : la dynamique n'est pas qu'une statique à laquelle on a ajouté des dates, et les relations de statique ne sont pas aussi facilement transposables en dynamique. Cependant, cet exemple fait bien saisir la dimension supplémentaire qui s'introduit quand on tient compte de l'écoulement du temps; et cette complication des relations se retrouve évidemment au niveau des résultats qu'on désire en tirer; ce qu'il faut déterminer c'est non plus un nombre, par exemple la consommation d'équilibre qui serait donnée immédiatement par la relation $C = f(R)$, mais une infinité de nombres, ou mieux une fonction, la valeur de la consommation au cours des différentes périodes à venir, soit $C(t)$; les calculs sont d'ailleurs beaucoup plus complexes et pourtant le schéma proposé reste encore bien sommaire.

Enfin, l'opposition statique-dynamique se traduit généralement sur le plan logique par une opposition interdépendance-causalité; la causalité suppose en effet souvent l'antériorité, qui ne peut se rencontrer que quand le temps intervient.

Il n'est pas pour s'en convaincre que de comparer les théories de fixation du prix et des quantités échangées sur un marché, selon la théorie classique de Walras, et selon le schéma de la toile d'araignée. Dans le premier cas, prix et quantité s'obtiennent tous deux par la combinaison des lois d'offre et de demande; le prix ne détermine pas plus la quantité que la quantité le prix : il y a interdépendance entre les deux. Par contre, dans la deuxième théorie, qui s'applique tout spécialement aux produits agricoles, la quantité échangée est fixée à partir des données antérieures, et plus particulièrement du prix d'échange de l'année passée, qui, s'il a été par exemple élevé, aura incité les producteurs à accroître leur offre; et le prix courant résulte de la quantité par l'intermédiaire de la loi de demande; on assiste donc à un schéma causal :

prix antérieur → quantité actuelle → prix actuel.

Ainsi, bien souvent, alors qu'en statique les relations sont à double sens, (si A est cause de B, B est également à l'origine de A), la dynamique sera par contre le terrain d'élection des liaisons à sens privilégié. Aux systèmes de plusieurs équations se substitueront des relations récurrentes.

Si, d'autre part, on analyse des séries statistiques réelles dont on veut expliquer les mouvements, on se trouve en général confronté avec des problèmes nouveaux, comme le montre l'exemple simple suivant : Imaginons qu'en vertu d'une interprétation simpliste de la théorie keynésienne, on cherche s'il y a une liaison entre l'évolution de la masse monétaire et celle du produit national; pour cela on trace sur un graphique les points, un par année, qui ont pour abscisse le produit national de l'année considérée, et pour ordonnée la masse monétaire à la fin de l'année correspondante (voir fig. 1), on obtient un alignement très satisfaisant et on est ainsi conduit à penser que le lien subodoré existe effectivement. Mais s'il y a un tel lien entre les niveaux de ces deux quantités, on doit pouvoir en tirer une relation sur les variations de ces niveaux d'une année sur l'autre; en d'autres termes, la connaissance de la variation de la masse monétaire entre le 31 décembre 1965 et le 31 décembre 1964 doit nous éclairer sur la variation du produit national entre 1965 et 1964.

Traçons alors le graphique correspondant en portant en abscisse les variations de produit national d'une année sur l'autre et en ordonnée les variations de la masse monétaire entre la fin d'une année et la fin de l'année précédente : le résultat est totalement négatif : aucune liaison nette n'apparaît. On est alors conduit à penser que la liaison entre masse monétaire et produit national n'est pas aussi simple qu'il apparaissait de prime abord,

et on est incité à se méfier des liens trop visibles entre chroniques. Il serait d'ailleurs facile de citer d'autres cas où une liaison réelle n'est pas mise en évidence sur les séries statiques existantes.

Années	Produit national en francs courants Base 100 : 1959	Masse monétaire en fin d'année en milliards de francs
1958	97,3	73
1959	100,0	82
1960	107,6	93
1961	112,4	108
1962	119,9	127
1963	126,0	146
1964	132,8	158

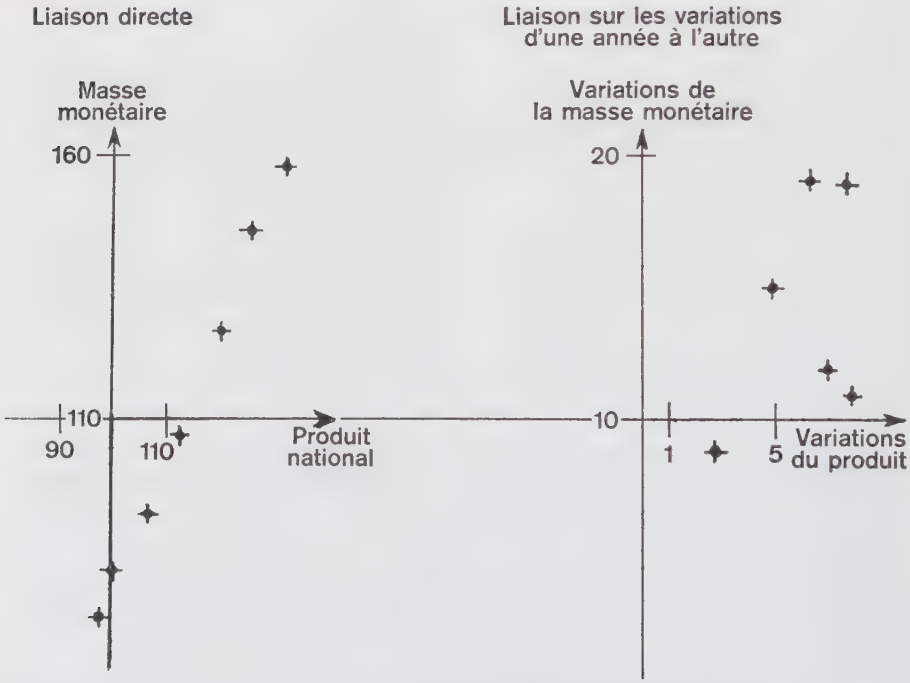

Fig. 1. — Liens entre masse monétaire et produit national.
Source : I.N.S.E.E.

Toutes ces particularités font sentir à la fois l'intérêt et le caractère propre d'une étude des phénomènes temporels.

2) Economie et mathématiques

Les rapports entre économie et mathématiques ont donné lieu, et donnent encore lieu, à de multiples controverses. D'un côté sont les tenants de l'affirmation « il n'y a de science que du mesurable » qui pensent, qu'après éventuellement une connaissance intuitive, qualitative, d'un phénomène, doit prendre place une phase où domine le quantitatif, qui permet une évaluation plus précise et une action mieux contrôlée; et, certes, le développement des statistiques semble bien leur donner raison. Mais cette attitude a donné lieu à des abus bien connus.

Les partisans de l'attitude inverse ont donc beau jeu de déclarer que l'économie échappe pour une bonne part aux mathématiques et ne saurait se résoudre en un ensemble de théorèmes faussement précis, déduits d'hypothèses plus ou moins fondées, qui feraient perdre de vue tout un aspect des réalités auxquelles on se trouve confronté, leur aspect humain, social et politique au sens noble du terme.

Sans trancher dans un tel débat qui est peut-être un faux débat, il n'est pas inutile de se poser la question suivante : « la science mathématique existe, de quelle aide peut-elle être à son stade actuel, pour l'économiste ? »

Cette aide revêt, semble-t-il, deux aspects :

Les mathématiques aident d'abord à la solution des problèmes que rencontre l'économiste. Citons par exemple la théorie des séries qui permet de définir l'effet global du multiplicateur dynamique à partir de la connaissance de son action à l'intérieur de chaque période de revenu. Les mathématiques jouent alors un rôle simple et clair : un problème est posé, il s'agit de chercher dans l'arsenal des théorèmes connus s'il n'y en a pas un qui permette de le résoudre. Dans cette perspective, la plus évidente probablement, les mathématiques constituent en quelque sorte un investissement intellectuel, un réservoir de logique : si tel théorème a été démontré une fois, le résultat qu'il fournit est définitivement acquis et on pourra l'appliquer chaque fois que les hypothèses du théorème sont remplies, sans avoir à refaire le raisonnement.

Mais elles peuvent procurer à l'économiste une autre aide plus subtile et qui met davantage les deux sciences en symbiose. Les mathématiques sont, en effet, un langage, un moyen d'expression et, en tant que tel, elles véhiculent la pensée, mais elles en sont également un moule, d'ailleurs extraordinairement précis et exigeant pour l'esprit, qui oblige l'économiste à approfondir ses concepts, à réviser ses définitions, en un mot à réexaminer son univers d'un œil plus aigu.

Une autre technique présente avec l'économie des liens semblables, qu'il n'est pas inutile de développer pour mieux faire saisir par analogie ce qu'on peut attendre des mathématiques à cet égard : il s'agit de la Comptabilité nationale. Celle-ci a fourni à la science économique les données statis-

tiques dont elle a besoin, mais, en outre, avec ses classements en catégories et les nécessaires relations entre les différentes catégories, elle imprègne maintenant la science économique; elle incite l'économiste à revoir sous un angle nouveau certaines positions qu'il avait adoptées, et même lui permet de mettre en évidence certains problèmes qu'il ne soupçonnait pas, ou dont au moins il soupçonnait mal l'importance; pensons aux problèmes que posent les mécanismes financiers ou les considérations sur l'autoconsommation des ménages. Il n'est pas jusqu'aux limites de cette technique qui n'aient servi à l'analyse économique; et là il faut citer les recherches sur la mesure de la croissance; la connaissance précise de ce que peut fournir la comptabilité nationale a permis justement de mieux dégager tout ce qui, dans le phénomène de croissance, échappe aux chiffres, n'est pas quantitatif mais qualitatif.

Nous pensons qu'une telle dialectique entre économie et mathématique peut être instaurée de façon particulièrement féconde en matière d'analyse dynamique, et nous espérons que la suite le montrera, mais il n'est pas inutile de marquer, dès maintenant, certains concepts qui restent insatisfaisants et pourraient être grandement éclairés par une approche mathématique.

Et d'abord la notion de période : on parle couramment de la courte période, de la longue période, on énonce que, par exemple, les capacités de production suivent l'évolution de la demande en longue période, mais y sont relativement insensibles en courte période; tout ceci paraît facile mais est parfois délicat à préciser davantage : comment passe-t-on de la courte période à la longue période ? On a alors imaginé le concept de moyenne période, mais comment s'effectue le passage de la courte à la moyenne période et celui de la moyenne à la longue période ? On verra que les mathématiques peuvent aider à comprendre la notion de période et à mieux cerner ses acceptations possibles.

Un autre terme d'usage courant est celui d'effet en retour, les Anglo-saxons diraient de feed-back. Ainsi, dans le modèle de l'oscillateur de Samuelson, un accroissement du niveau de l'Investissement par rapport à la situation antérieure, détermine un nouveau Revenu global, mais l'augmentation de Revenu ainsi engendrée est la source d'investissements supplémentaires qui conduisent eux-mêmes à une nouvelle valeur du Revenu, et la chaîne se poursuit indéfiniment, chacune des deux quantités, le Revenu et l'Investissement, étant à la fois cause et conséquence de l'autre. De même, l'inflation est souvent expliquée par un mécanisme de ce type : une hausse des salaires entraîne une hausse des prix, dont l'effet est une nouvelle hausse des salaires et ainsi de suite. Les journaux parlent volontiers alors du « cercle vicieux » de l'inflation, de la spirale inflationniste des salaires et des prix. Il est permis de penser, et on s'efforcera de le montrer, que les mathématiques peuvent fournir une représentation plus exacte et plus utile de ce type de mécanisme.

Certes le langage mathématique est assez rebutant pour celui qui n'en a pas une pratique constante; mais, si l'on sacrifie un peu à la rigueur, pour s'attacher aux fondements des théorèmes, on s'aperçoit que ceux-ci sont très souvent la traduction d'idées assez simples; on peut utiliser les mathématiques comme un outil, dont on ne connaît pas parfaitement les détails de fonctionnement, mais qui n'en est pas moins extrêmement commode; c'est un peu selon ce principe que s'en servent les ingénieurs, et il n'y a pas de raison qu'il ne puisse en être de même pour les économistes.

3) Plan de l'ouvrage

L'utilisation des mathématiques ne doit pas faire oublier que ceux-ci ne sont qu'un moyen d'expression; ce qui est au cœur des séries temporelles, c'est le temps; c'est donc sur ce dernier concept qu'il faut se pencher pour organiser les réflexions qui suivront.

Le temps est une notion qui reste troublante pour l'esprit humain : il constitue, comme l'espace, une des dimensions de notre vie, mais présente par rapport à lui, des particularités étranges : nous ne sommes pas maîtres de son écoulement, qui s'impose à nous dans un sens déterminé, nous ne pouvons ni ralentir ni accélérer sa venue.

Le schéma de temps qui est peut-être le plus intuitif et qui imprègne le plus nos esprits est celui de la physique classique : le temps est alors découpé en passé, présent et futur. Le présent n'est qu'un point de temps sans épaisseur qui sépare uniquement le passé du futur. Quant au futur, bien que non encore constaté, il se trouve totalement fixé par le passé et les lois immuables qui l'y relient. C'est le déterminisme laplacien suivant lequel la connaissance de l'ensemble des lois qui régissent l'Univers et de l'évolution antérieure de celui-ci permettrait de déterminer parfaitement sa situation à n'importe quel instant futur. Cette conception d'ensemble a, certes, été fort utile en physique, et elle l'est encore à titre d'approximation pour bien des branches de cette science, mais elle a été abandonnée depuis la découverte du principe d'incertitude par Heisenberg : le futur gardera toujours une part d'indétermination, d'aléas, et il est impossible de le lier rigidement au passé, qui finalement ne permet de déterminer qu'une évolution moyenne, dont diffèrera la réalité.

Il est curieux de constater que ces deux stades de la réflexion se rencontrent dans l'analyse économique dynamique. Toute une classe d'analyses partent de l'existence de lois déterministes qu'elles combinent et qui permettent, à partir d'une situation initiale donnée, de prévoir sans ambiguïté, l'évolution future du système abstrait ainsi construit. Nous leur consacrerons la première partie de cette étude.

Mais on s'est aperçu rapidement que la réalité ne se laissait pas enfermer dans un moule aussi rigide; en fait, l'évolution future n'est plus parfaitement fixée, elle n'est connue qu'en moyenne, et ce pour des raisons faciles à

comprendre : d'une part les grandeurs économiques ne sont en général estimées qu'avec une marge d'erreur importante, et ensuite les lois économiques qui entrent en jeu traduisent la plupart du temps des comportements d'individus ou de groupes sociaux; elles gardent donc une part d'indétermination irréductible due à la liberté humaine : l'homme peut se trouver incité à agir dans tel ou tel sens pour différents motifs, il n'en reste pas moins, dans une certaine mesure, libre de son choix et peut parfaitement ne pas réaliser ce à quoi l'attitude habituelle le mènerait. Ceci conduit à introduire l'aléa, ce que nous ferons dans la deuxième partie.

Cependant, jusqu'ici l'analyse reste en grande partie mécanique, comme le prouve le fait qu'on retrouve son pendant en physique : nous avons donné à l'homme une part de liberté, certes, mais nous avons supposé que ses actions présentes et futures trouvaient leur source dans le passé. En fait, nos actions ne sont pas aussi automatiques, elles visent un but, elles sont sous-tendues par une finalité, contrairement à la matière qui, de ce point de vue est inerte; et ce but qui anime chacun de nous, c'est dans le futur qu'il se situe, un futur que nous essayons à la fois de prévoir avec notre intelligence, et de modeler grâce à notre volonté. Après les méthodes fondées sur le passé, sur l'« émergence », selon la formule de H. Guitton, il faudra donc faire une place aux procédures issues de l'« anticipation »; il sera nécessaire d'intégrer à l'analyse le futur, non pas tant le futur réel, mais plutôt le futur tel qu'on voudrait qu'il soit, ou tel qu'on pense qu'il sera. Ce sera là l'objet de la troisième partie.

PREMIÈRE PARTIE

LE PRÉSENT ENGENDRÉ PAR LE PASSÉ

LE DÉTERMINISME CLASSIQUE

Cette première partie sera donc consacrée à l'étude des modèles déterministes classiques. C'est, en effet, sous forme déterministe que se présentent d'abord la plupart des lois économiques, et ce n'est qu'après un examen ultérieur, en faisant la part de ce qui est contingent, qu'on y introduit le hasard : ainsi dans le jeu de l'offre et de la demande, du multiplicateur, de l'accélérateur, les aléas n'interviennent que comme facteurs seconds destinés à nuancer des lois qui s'imposent en premier à l'esprit sous un aspect parfaitement rigide.

Il est alors tentant de combiner certaines d'entre elles pour aboutir à ce que l'on appelle un modèle; et c'est là une démarche tout à fait analogue à celle du physicien qui, par exemple, isole la loi d'Ohm et celle de la dilatation des corps et les combine pour construire un thermostat.

Cette correspondance sera étudiée en détail dans le premier chapitre consacré à la comparaison entre modèles déterministes physiques et économiques; on y verra que la principale différence tient à la manière dont est traité le temps : découpé en périodes par l'économiste, il garde chez le physicien une structure continue; il n'y a toutefois là rien d'obligatoire, c'est plutôt une question d'habitude.

Il est donc intéressant d'appliquer l'analyse en temps continu aux phénomènes économiques; c'est ce que nous ferons dans le deuxième chapitre, qui se limitera toutefois aux systèmes les mieux connus, les systèmes linéaires : « Les systèmes linéaires en temps continu ».

Enfin, le troisième chapitre sera l'occasion d'un « bref aperçu sur les systèmes non linéaires ».

CHAPITRE 1

COMPARAISON ENTRE MODÈLES DÉTERMINISTES PHYSIQUES ET ÉCONOMIQUES

Quand, au début de ce siècle, on a pris conscience de ce qu'un certain nombre de phénomènes économiques, en particulier les mouvements de prix, de revenu, d'emploi, ne pouvaient pas être expliqués par la théorie classique de l'équilibre qui régnait alors sur la science économique, on s'est attaché à mettre en évidence des enchaînements causaux susceptibles de rendre compte de ces mouvements qui rendaient criante la nécessité d'analyses dynamiques. C'est alors, par exemple, que J.M. Clark et Aftalion découvrent le principe d'accélération, que Wicksell, distinguant le taux d'intérêt naturel du taux d'intérêt monétaire, voit dans leur écart une source de mouvements cumulatifs.

Puis, selon une évolution naturelle, on s'est efforcé de donner à ces enchaînements causaux des expressions quantitatives, et ces dernières, comme la théorie de l'équilibre dont elles constituaient le prolongement à la fois logique et chronologique, étaient déterministes, c'est-à-dire ne faisaient aucune place au hasard.

Cet effort de quantification est d'ailleurs récent, et on peut, semble-t-il, le dater avec assez de précision à 1935 avec la parution du modèle de cycle de Kalecki [1]. Il s'est ensuite développé rapidement pour atteindre une sorte de point culminant aux alentours des années 50.

Les modèles construits traitent parfois de l'évolution à long terme, comme par exemple le modèle de croissance de Harrod, mais le plus souvent, expliquent les fluctuations cycliques et les mouvements à court terme, comme les séquences de Lundberg, ou les modèles de stocks de Metzler.

[1] Kalecki : A macrodynamic theory of business cycles, *Econometrica* (1935).

Ils se présentent très généralement sous la forme d'équations de récurrence, liant la valeur d'une grandeur à un instant donné aux valeurs passées de cette même grandeur. Ils impliquent donc une causalité économique analogue à la causalité physique classique où le présent et le futur sont définis sans ambiguïté par la connaissance du passé.

Le passé interviendra d'abord sous la forme des souvenirs qu'il laisse; c'est ainsi que pour Hicks, la tendance antérieure des prix servira de base à l'estimation de l'évolution des prix futurs.

Mais, il y a un autre mode d'influence du passé qui tient aux traces matérielles que lèguent les événements antérieurs, et qui forment en quelque sorte le cadre de la situation présente : tels sont le capital, résultat des investissements passés, les institutions et règles d'organisations, produits de l'histoire économique et politique.

Les théories peuvent d'ailleurs se distinguer entre elles selon la manière dont elles traitent ces souvenirs et ces traces qui constituent le lien entre passé et présent : les plus statiques en font des données, et supposent que tout cet acquis est fixé et ne se modifie pas : il n'y a pas de souvenir, le capital, les institutions sont fixes; la théorie keynésienne originale répond à peu près à ces conditions : le temps s'y trouve découpé en périodes sans lien entre elles. L'école suédoise, avec Myrdal en particulier, franchit un pas et développe l'analyse ex-ante - ex-post : ici, chaque période est le siège d'un ajustement entre prévisions ex-ante et réalisations ex-post, ajustement qui, à travers les phénomènes monétaires, donne son empreinte à la période suivante; d'une manière semblable, les modèles de fluctuations de stocks de Metzler admettent une modification possible du capital circulant, mais supposent le capital fixe constant, alors que l'oscillateur de Samuelson laisse à ce dernier la possibilité de varier. Mais, dans ces deux exemples, les prix sont des paramètres fixes, qui retrouvent une certaine liberté dans les constructions récentes de Hicks. Enfin, les cadres et les institutions, jusqu'ici intangibles, reprennent leur souplesse à travers des théories plus générales, comme celle de Marx.

Mais les différences ainsi mises en évidence sont affaire de matière plus que de manière; elles portent sur le point d'application des méthodes, non sur les méthodes elles-mêmes qui sont inspirées du déterminisme le plus strict. Il n'est donc pas sans intérêt d'approfondir les analogies et les différences existant entre la formalisation des systèmes économiques envisagés ici et celles des systèmes de la physique classique. On verra que les analogies, qui feront l'objet de la section 1, se rencontrent principalement au plan des idées de base, alors que les différences, développées dans la section 2, tiennent surtout aux techniques employées pour la traduction de ces idées de base.

1 - LES ANALOGIES ENTRE MÉCANISMES ÉCONOMIQUES ET MÉCANISMES PHYSIQUES CLASSIQUES

Ces analogies sont grandes : on a, dans les deux cas, un phénomène obéissant à une loi déterministe, impérative, par rapport à laquelle il n'y a pas d'écart possible, ou tout au moins par rapport à laquelle les écarts ne sont pas perceptibles; ainsi, le mécanisme du multiplicateur est aussi inéluctable que la loi d'Ohm en Electricité, ou la loi de Newton en Mécanique. En outre, dans ces deux dernières disciplines scientifiques, la loi joue dans un cadre défini par ce qu'on appelle les « conditions aux limites », ou en terme de mécanique les « conditions initiales »; et l'intéraction de la loi et de ce cadre détermine complètement l'évolution ultérieure; ainsi, le mouvement d'un corps dans le vide est fixé par la connaissance de sa position et de sa vitesse initiales et par la loi de Newton. De même l'évolution de l'intensité dans un circuit électrique peut se calculer exactement à partir des lois d'Ohm quand on connaît l'évolution du voltage aux bornes de ce circuit; parallèlement, en économie, les modèles de séquence de Lundberg, par exemple, permettent de connaître l'état du système économique pour n'importe quelle période future et cela uniquement à partir des lois liant entre elles les différentes grandeurs, des valeurs initiales de ces grandeurs, et de l'évolution, donnée à priori, des variables exogènes.

Enfin, une caractéristique commune aux lois physiques et économiques est qu'elles sont souvent linéaires, c'est-à-dire que les effets sont proportionnels aux causes : si, en électricité, on double le voltage d'un réseau électrique, l'intensité doublera; si, de même, on double l'investissement dans un modèle de multiplicateur, tous les revenus ultérieurs seront doublés. La place importante que tiennent les structures linéaires tient à deux causes : tout d'abord, en général, les relations linéaires sont une première approximation satisfaisante de la réalité; si, comme Einstein l'a montré, la loi de Newton est erronée, elle n'en constitue pas moins une approximation tout à fait satisfaisante pour les phénomènes à l'échelle humaine. Ensuite, le traitement mathématique des structures linéaires est plus simple et beaucoup mieux connu que celui des phénomènes non linéaires.

Cette correspondance entre systèmes physiques et systèmes économiques a d'ailleurs été bien souvent ressentie par les économistes : nous n'en voulons pour preuve que la comparaison désormais classique d'Aftalion, entre le principe d'accélération et le mécanisme de fonctionnement d'un appareil de chauffage : quand la température d'un local est jugée trop basse, les occupants, ou un appareil automatique tel qu'un thermostat, alimentent le poêle en combustible; mais la pièce n'étant pas réchauffée instantanément, la température reste basse et le poêle continue à être alimenté; cette alimentation s'arrête quand la température a atteint le niveau désiré par l'homme,

ou indiqué par le thermostat; mais alors si le thermostat a été mal réglé, ou l'individu malhabile, le poêle chauffe trop fort et la température continue à monter, dépassant le niveau souhaité : ce mécanisme, tout à fait analogue au fonctionnement du principe d'accélération, pourrait facilement être « mis en équation » et il est évident que la relation obtenue serait en tout point semblable, isomorphe, à celle que formaliserait le principe d'accélération : seuls les noms seraient différents.

Ainsi, au plan des principes, les analogies sont grandes entre systèmes physiques et systèmes économiques. Les différences apparaissent surtout dans les modalités de traitement comme va le montrer la section suivante.

2. LES DIFFÉRENCES ENTRE MÉCANISMES ÉCONOMIQUES ET MÉCANISMES PHYSIQUES

Ces différences tiennent essentiellement à la formulation des modèles, et, plus précisément, à la manière dont est introduit le temps : l'économiste découpe le temps en périodes, alors que l'ingénieur et le physicien considèrent que le temps varie de manière continue. Pour mieux saisir les conséquences de cette différence et en juger le bien-fondé, il importe d'analyser la notion de période dont les économistes font un usage si fréquent, et si divers.

On peut, en se référant à l'ouvrage de R. Barre : « la période dans l'analyse économique », dont s'inspirent étroitement les considérations qui suivent, distinguer d'abord les périodes concrètes, du type annuel, par exemple période de perception de l'impôt, ou pluri-annuel, comme la période des fluctuations cycliques; il est facile de voir que le qualificatif de concret auquel elles prétendent est abusif : la réalité ne présente pas la régularité et l'homogénéité qu'elles postulent.

Mais le terme de période a également été utilisé dans un autre sens, plus lié à l'analyse théorique : c'est alors en quelque sorte l'atome de temps, l'intervalle d'étendue constante à l'intérieur duquel tous les phénomènes conservent le même aspect, celui-ci ne pouvant changer qu'entre deux périodes; toutefois cette conception a recouvert, suivant les auteurs, des réalités légèrement différentes.

C'est Marshall qui l'a introduite le premier en distinguant, dans le jeu de la loi de l'offre et de la demande, la courte période et la longue période; dans la première, l'adaptation à la demande se fait par les prix; au cours de la seconde, les équipements peuvent varier.

La période marshallienne s'est révélée un instrument d'analyse particulièrement fécond, mais on doit bien reconnaître qu'elle garde un caractère à la fois statique et abstrait.

Statique, car la théorie ne dit pas, ou plutôt dit mal, comment se fait le passage de la courte à la longue période; la période correspond évidemment à un temps de perception-réaction, mais le terme est bien général et peut recouvrir des situations concrètes fort diverses; ainsi, dans le cas de l'adaptation de l'équipement à la demande, il est certain que la perception du changement de demande est rapide, mais, avant que la décision de modifier l'équipement ne soit prise, il s'écoulera un certain laps de temps variable selon la conjoncture générale, l'opinion du chef d'entreprise sur la permanence du changement constaté, etc.; il n'y aura pas non plus simultanéité entre la décision d'investir et la mise en service de cet investissement; et pendant tout cet intervalle qui s'écoule entre le changement de demande et la réalisation de l'investissement, on ne sera pas encore dans le cadre de l'analyse de la longue période, puisque précisément l'investissement ne sera pas encore productif, mais plus tout à fait dans celui de la courte durée, car l'entrepreneur hésitera peut-être à modifier ses prix, dans la perspective de la mise en service prochaine des nouveaux équipements. Il y a ainsi entre deux périodes successives (ici la longue et la courte), toute une frange à l'intérieur de laquelle les réactions sont mal expliquées. Mais, parallèlement, chaque instant concret appartient à différentes périodes : la courte vis-à-vis d'un changement de la demande qui vient de se produire, la longue par rapport aux modifications plus lointaines, et on ne voit pas bien comment se combinent les comportements résultant de ces diverses appartenances.

Enfin, la notion marshallienne de période reste abstraite, car les temps de réaction auxquels elle fait appel ne sont pas uniformes, ni dans le temps, ni dans l'espace; ils peuvent varier d'une entreprise à l'autre et pour une même entreprise d'une époque à l'autre, et ce qu'on en extrait, c'est une valeur centrale, une sorte de moyenne. Certes, l'analyse de Marshall a connu maintes améliorations (1), mais les inconvénients recensés subsistent.

D'autres conceptions de période unitaire ont vu le jour : citons deux types de périodes à caractère plus dynamique, ou tout au moins plus adaptées à l'analyse dynamique, il s'agit de la période de revenu et de la période de production. La période de revenu est l'espace de temps qui sépare la perception du revenu de son emploi; la période de production, l'intervalle qu'il y a entre un changement dans la demande reçue par un entrepreneur et la modification dans le rythme de production qui en résulte; ces concepts présentent des liens évidents avec la notion d'établissement de plans par les agents économiques, et peuvent donc être rapprochés des analyses ex ante - ex post introduites par l'école suédoise; l'objection d'a-dynamisme précédente tombe partiellement, mais on ne peut pas ne pas retenir encore celle d'abstraction : on ne peut en général accepter l'hypothèse que les agents économiques n'établissent des plans et ne les revisent qu'à des époques

(1) Voir J. Marchal : *Le mécanisme des prix* (Paris, 1950).

bien définies et également espacées, en dehors desquels ils suivent sans dévier la voie qu'ils se sont tracée; on pourrait à la rigueur le concevoir pour un individu isolé, mais ceci devient faux pour la collectivité toute entière : les personnes qui la composent ne planifient pas leur action aux mêmes instants. Et la simplification qu'on pouvait admettre d'une analyse abstraite, visant à expliquer et faire comprendre un processus moyen, devient bien moins admissible quand on peut passer à l'outil de pensée puissant et précis que sont les mathématiques; il est peu profitable de les employer si l'on se contente d'hypothèses aussi grossières.

Mais l'analyse qui précède se rapportait à l'utilisation de la notion de période pour l'étude d'un mécanisme isolé; des difficultés supplémentaires apparaissent quand on introduit plusieurs lois différentes dans un même modèle. Prenons par exemple le schéma de l'oscillateur : il combine une fonction de consommation, avec un décalage d'une période, et un effet d'accélération, avec un décalage d'une période également. Même si l'on suppose que, pour chacun de ces deux mécanismes, la notion de période convient, on peut douter que leurs deux périodes éventuelles soient les mêmes. Il n'y a pas de raison pour que les chefs d'entreprises modifient leurs équipements et que les consommateurs changent leurs habitudes à la même fréquence; si l'on s'en tient d'ailleurs aux estimations courantes de la période de revenu, celle-ci serait de l'ordre de 4 mois, et il est improbable que les entrepreneurs investissent au vu d'une variation aussi brève de la demande qui leur est adressée. De nombreux auteurs, en particulier Lundberg, ont d'ailleurs insisté sur le choix de la période unitaire à utiliser dans chaque modèle. Ce sera évidemment la plus courte des différentes périodes impliquées dans les opérations élémentaires; mais on complique alors considérablement l'expression mathématique des relations et il est plus simple dans ce cas de supposer que le temps varie de façon continue.

Le recours à l'analyse par période trouve toutefois une justification importante qui tient au fait que les statistiques économiques se réfèrent précisément à des périodes de temps égales, ou donnent les valeurs de certaines grandeurs, à des intervalles équidistants; mais il n'est pas du tout sûr, bien au contraire, que cette période d'enregistrement des faits coïncide avec la période d'analyse du phénomène étudié, et il importe de distinguer soigneusement l'une de l'autre.

Considérons par exemple l'analyse des mouvements à court terme, c'est-à-dire sur quelques mois; une période d'enregistrement d'un an fournit des résultats très différents, et bien moins bons, qu'une période d'enregistrement mensuelle. Le graphique ci-contre (fig. 1-1) retrace pour la France l'évolution de la production industrielle mensuelle et celle de la production annuelle; dans l'optique annuelle, on ne voit pas apparaître de crises, simplement des ralentissements du rythme de croissance : sous l'angle mensuel, par contre, on retrouve bien les deux crises de 58-59 et de 1964-65.

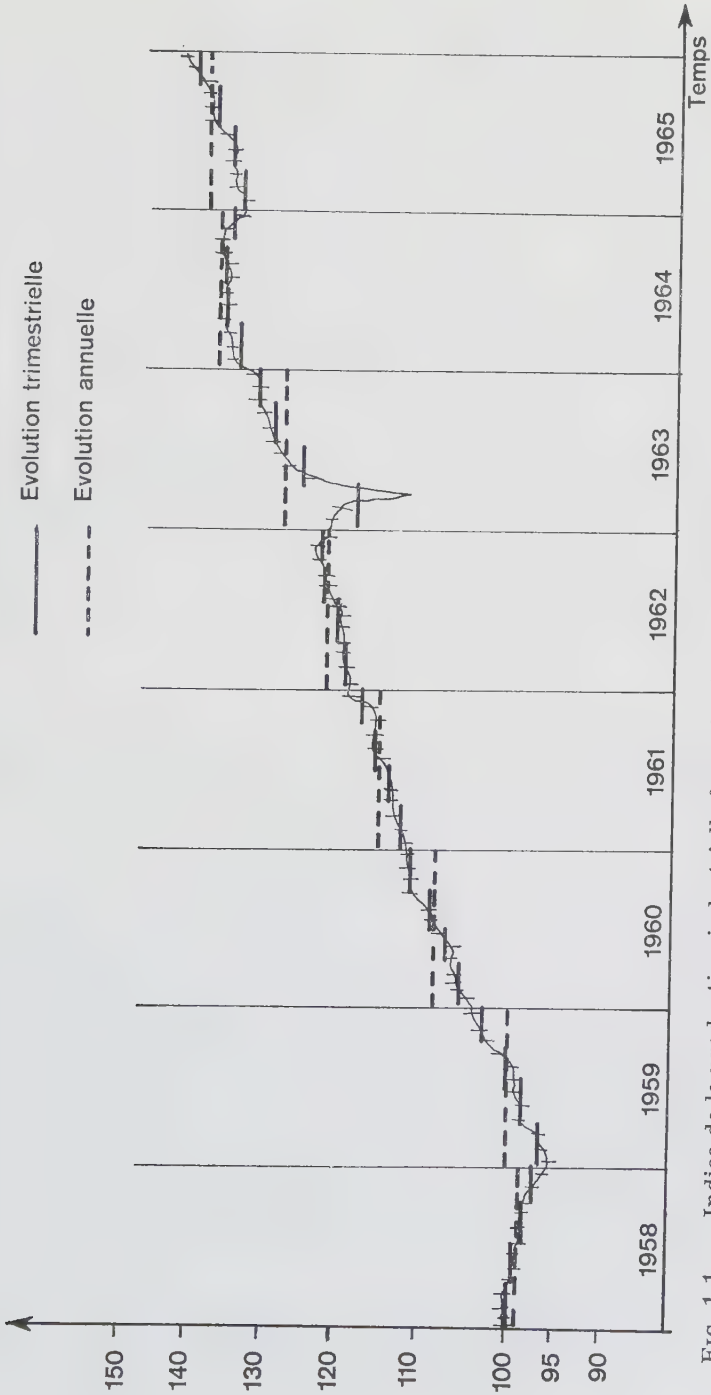

FIG. 1-1. — Indice de la production industrielle française (sans le bâtiment). Base 100 en 1959. *Source* : I.N.S.E.E.

Enfin, sur le même graphique on a construit un indice de production trimestriel, le trimestre correspond à peu près à l'idée que l'on se fait de la courte période; et on voit que l'évolution de la conjoncture reste cependant mieux rendue par l'indice mensuel que par l'indice trimestriel [1]. Ceci montre qu'il y a dissociation entre la période d'analyse et la période d'enregistrement, et que cette dernière doit être nettement inférieure à la première pour que le phénomène étudié garde sa pureté.

De toute façon, au stade de construction abstraite qui est le nôtre ici, une méthode plus scientifique serait de prendre en première phase le temps comme il se présente, c'est-à-dire sous forme continue, pour examiner ensuite dans quelle mesure et selon quelles modalités les relations trouvées peuvent être remplacées par des égalités traitant le temps de manière discontinue.

Restituer au temps sa nature propre, qui est continue, permet en effet d'aplanir bien des difficultés parmi celles que suscite la notion de période. Ceci est facile à comprendre car, à un concept abstrait, on substitue le temps concret tel qu'on le subit; on aboutira alors à des représentations plus souples et plus nuancées.

Pour le voir, prenons l'exemple de la fonction de consommation. L'analyse par période la plus simple suppose :

$$C(t) = a\,R(t-1).$$

La consommation présente est une fraction constante du revenu de la période antérieure. Ainsi, si, par exemple, le revenu subit l'évolution indiquée sur le graphique ci-dessous, la consommation se déformera brutalement, pour atteindre d'un seul coup son nouveau niveau d'équilibre, indiqué en traits pointillés (courbe 2 de la figure 1-2).

Cette adaptation est évidemment trop brutale pour être réelle; une représentation qui serait beaucoup plus satisfaisante, et que permet l'adoption du temps continu, serait par exemple celle figurée sur la courbe 3 : à partir du moment où le revenu a brusquement changé, la consommation se modifie de manière progressive pour n'atteindre sa nouvelle valeur d'équilibre qu'au bout d'un certain temps; on dispose, dans l'arsenal des fonctions courantes, d'un grand nombre de fonctions susceptibles de figurer de manière convenable cette évolution.

La différence dans la formulation conduit d'ailleurs à une différence dans les méthodes de traitement. En général, en économie, on étudie les modèles par le calcul direct, on recherche les valeurs numériques successives de la grandeur étudiée, comme le fait Lundberg dans ses modèles de séquence, ou plus généralement on détermine la fonction $f(t)$ qui définit l'évolution

[1] En particulier, l'indice trimestriel semble montrer que la reprise de 1959 ne s'est produite qu'au 2e trimestre 1959, alors qu'en fait elle a eu lieu en février 1959; de même, la crise de 1964-65 apparaît trop tôt, et la reprise trop tard.

de cette grandeur au cours du temps. L'ingénieur utilise bien d'autres procédés, de nature graphique en particulier, avec la construction d'abaques, et il s'intéresse à des caractéristiques plus globales de l'évolution de la grandeur en cause : oscille-t-elle ou non, augmente-t-elle ou diminue-t-elle constamment ? Les méthodes dont il use lui donnent directement la réponse à ces questions, ce qui n'est pas le cas en économie, bien qu'elles intéressent au plus haut point le chercheur.

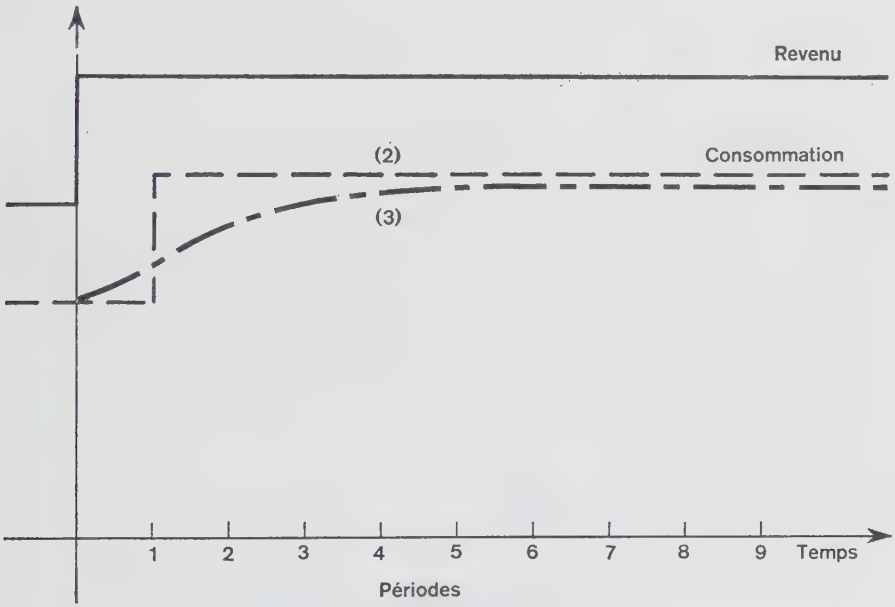

FIG. 1-2.

Ainsi les problèmes que se pose l'économiste dans une approche théorique des modèles déterministes sont tout à fait analogues à ceux que les physiciens et les ingénieurs ont eu à résoudre. Les solutions apportées sont assez différentes mais ceci provient surtout de raisons historiques, et en quelque sorte contingentes. Il est donc intéressant d'examiner dans quelles mesures les outils du physicien, qui ont fait largement leurs preuves, peuvent enrichir l'arsenal des méthodes utilisées par l'économiste. C'est à cela que sera consacré le chapitre suivant, pour le cas des systèmes linéaires.

CHAPITRE 2

LES SYSTÈMES LINÉAIRES EN TEMPS CONTINU

Les systèmes linéaires ont été largement développés sous l'impulsion des besoins des physiciens et des ingénieurs. Mais avant d'exposer les méthodes de traitement qu'on a mis au point pour eux, et dans le but de montrer l'intérêt qu'ils peuvent présenter en économie, il est nécessaire de voir par quels processus logiques ils s'introduisent dans cette science.

La section 1 analysera donc les mécanismes de base des systèmes linéaires et exposera les raisons de leur fréquente intervention en économie.

Dans la section 2, on montrera comment, par combinaison de ces mécanismes, on construit les systèmes, et on indiquera les méthodes permettant de suivre leur évolution.

Enfin, la section 3 sera l'occasion de présenter quelques applications des méthodes précédemment exposées.

I — LES MÉCANISMES DE BASES DES SYSTÈMES LINÉAIRES

Les caractéristiques des systèmes linéaires ont été rapidement présentées au chapitre précédent sous un angle global : proportionnalité des effets aux causes. Cette définition reste vague et il est indispensable de la préciser en examinant par quels processus une telle proportionnalité peut s'introduire en économie. Pour cela, remarquons que les modèles économiques résultent de la combinaison d'un certain nombre de lois élémentaires; c'est au niveau de ces lois élémentaires qu'il faut chercher la linéarité.

Il apparaît alors que ces lois élémentaires se composent toutes de trois types de mécanismes de base :

— ceux qui relient les niveaux de différentes grandeurs à un même instant,

— ceux qui relient les niveaux de deux grandeurs avec des retards temporels,

— enfin, ceux qui unissent la tendance d'une grandeur, c'est-à-dire son accroissement au cours d'un laps de temps donné, avec le niveau d'une autre grandeur.

Il est d'ailleurs assez remarquable que tous les modèles dynamiques fassent appel à ces seuls trois éléments.

C'est ainsi, par exemple, que la fonction de consommation keynésienne la plus simple établit une relation linéaire entre le niveau du revenu et celui de la dépense à un même instant :

$$C_t = a R_t + b.$$

D'une manière plus évidente encore, la comptabilité nationale scinde la production en deux fractions : la consommation et l'investissement :

$$P(t) = C(t) + I(t).$$

Ce sont-là des relations entre les niveaux de différentes grandeurs à un même instant.

Un exemple de relation entre les niveaux de deux grandeurs avec retard se trouve dans la présentation classique du multiplicateur dynamique en terme de période, qui pose que le revenu additionnel d'une époque est consommé à l'époque suivante dans une proportion fixe :

$$C(t) = c R(t - 1).$$

Enfin, le principe d'accélération enseigne que l'investissement induit, c'est-à-dire celui qui a pour but de permettre un accroissement du volume de production, est déterminé par l'évolution récente de la consommation, par exemple :

$$I(t) = v [C(t) - C(t - 1)].$$

Il s'agit d'une relation entre le niveau d'une grandeur, l'investissement, et l'évolution d'une autre grandeur, la consommation.

On remarquera que toutes les relations citées sont linéaires. Pourquoi donc cette intervention si fréquente de la linéarité ? On sait d'abord qu'une formule linéaire constitue toujours une approximation valable de la réalité, au moins sur un certain champ de variation; mais, en outre, il semble qu'en économie le champ de variation sur lequel l'approximation linéaire reste satisfaisante soit particulièrement large. Ainsi, les quantités produites sont très généralement proportionnelles aux quantités de matières mises en œuvre; en ce qui concerne les investissements, la production est en raison directe du nombre de nouvelles machines mises en service; la consommation globale est, à structure donnée, en rapport constant avec la population. Il y a là un ensemble de liens où la linéarité s'introduit tout naturellement tout au moins à l'intérieur d'un domaine de variation assez vaste des grandeurs en jeu.

Les exemples que nous avons présentés l'ont été sous forme de période. Comme on l'a vu précédemment, ce parti comporte un certain nombre d'inconvénients qu'on peut facilement éliminer en y substituant le déroulement continu du temps. Prenons, par exemple, la deuxième fonction de consommation présentée, du type « relation entre niveaux avec retard »; écrite en terme de période, comme nous l'avons fait, elle revient à admettre que la consommation s'adapte tout d'un bloc au revenu, avec un décalage de temps constant et égal à une période; il est évident que dans la réalité, les choses ne se passeront pas ainsi; la dépense du revenu perçu à un instant donné peut être analysée de manière plus correcte dans l'hypothèse du temps continu : à partir de la date de la perception, la dépense à chaque instant [1], d'abord faible, augmentera et atteindra un plafond pour diminuer ensuite, puis s'éteindra quand la somme d'argent perçue aura été épuisée.

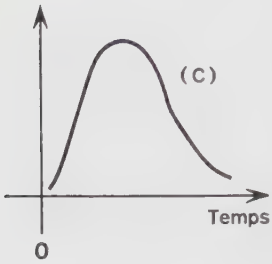

Fig. 2-1.

Graphiquement, un revenu unité perçu à l'instant 0 conduira à un flux de dépenses ultérieures représentées par la courbe C et non pas concentré à une époque donnée (fig. 2-1).

Dans ce cadre, l'hypothèse de linéarité implique que si le revenu perçu avait été, non pas une unité, mais, par exemple R, la courbe des flux de dépenses ultérieures aurait été R fois plus haute, et que si on combine un revenu perçu à l'instant 0 et un revenu perçu à un autre instant, l'évolution globale des dépenses aurait été la somme des dépenses obtenues dans chacun de ces cas, c'est-à-dire la courbe (D) du graphique ci-joint (fig. 2-2).

On voit qu'il sera ainsi possible de construire l'évolution des dépenses correspondant à une évolution des revenus donnés, en superposant les

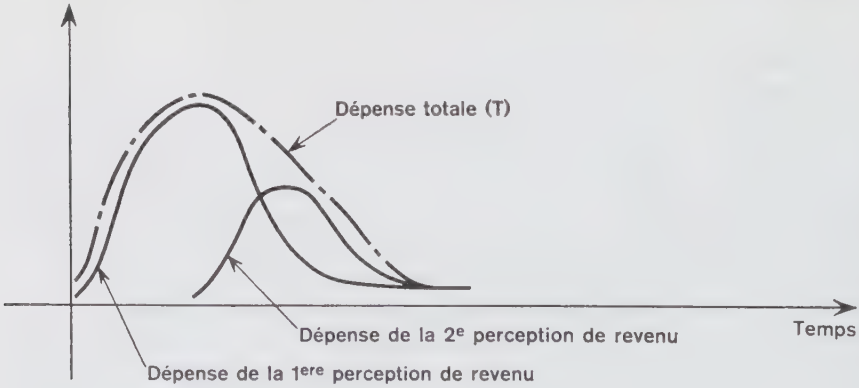

Fig. 2-2.

[1] Il ne s'agira plus alors d'un flux fini, mais d'un taux de dépense instantané.

courbes de dépenses correspondant aux revenus perçus à chaque instant. Mathématiquement, la consommation ne sera plus fonction du revenu d'une seule époque antérieure, mais dépendra continuement de toute l'évolution passée des revenus et on sent que cette dépendance sera complètement déterminée par la connaissance de la courbe C de la figure 2-1.

On a ainsi un procédé général pour rendre compte des retards temporels entre les niveaux de deux grandeurs; il suffit de savoir ce qui se passe pour la deuxième dans l'hypothèse d'une impulsion unité (1) de la première : on décompose alors l'évolution de cette première grandeur en une somme d'impulsions unités qui entraînent chacune une évolution particulière de la deuxième et la somme de ces évolutions conduit à la chronique cherchée (2).

Le troisième des mécanismes élémentaires recensés, celui qui relie la variation d'une grandeur au cours d'un certain laps de temps au niveau d'une autre grandeur, sera également facile à traduire en temps continu. On aboutit à une relation entre une fonction et la dérivée d'une autre fonction; la dérivée est en effet l'expression instantanée de la tendance d'une grandeur. Et il est symptomatique à cet égard que le modèle de Harrod qui, précisément, part d'une relation entre l'investissement présent et la variation ultérieure de revenu soit présenté tantôt en terme d'équation de récurrence et tantôt en terme d'équation différentielle (3). Dans un cas aussi simple d'ailleurs, la différence entre les deux présentations est surtout formelle, mais elle peut aussi avoir des répercussions plus profondes quand ce lien tendance-niveau est doublé d'un retard; ainsi, par exemple, au lieu de supposer que l'investissement induit est strictement proportionnel à la variation de consommation actuelle, on peut faire l'hypothèse que cet investissement dépend également des variations des consommations passées, qui auront évidemment une importance décroissante au fur et à mesure que l'on remonte le temps; on combine alors la représentation des retards déjà exposée avec l'introduction des dérivées, pour aboutir finalement à une formalisation souple et vraisemblable de la réalité (4).

(1) C'est-à-dire d'une variation brusque et momentanée.

(2) D'un point de vue mathématique, la relation entre consommation et revenu sera de la forme :

$$C(t) = \int_0^\infty p(\theta)\, R(t - \theta)\, d\theta$$

si $R(t)$ est l'évolution du flux de revenu et $p(\theta)$ la représentation de la courbe C précédente.

(3) Les deux formulations sont, par exemple, données dans H. Guitton : *Fluctuation et croissance économiques* (1964).

(4) Dans le cas présent, on aura par exemple :

$$I(t) = \int_0^\infty q(\theta) \frac{dC(t - \theta)}{dt}\, d\theta$$

$C(t)$ représentant la consommation, et $q(\theta)$ mesurant le poids de la variation de consommation antérieure de θ à l'époque actuelle.

On pourrait craindre toutefois que la description exacte de ces mécanismes avec un temps continu conduit à des complications mathématiques importantes, sans rapport avec l'intérêt des résultats obtenus; mais il faut insister sur le fait que dans l'hypothèse de linéarité, la connaissance de la réponse à une impulsion de la grandeur déterminante, permet de construire graphiquement, ou, mieux, de calculer ce qui se passe pour toute évolution de cette grandeur déterminante; les méthodes correspondantes, relativement inhabituelles en économie, sont par contre tout à fait courantes en physique et dans les sciences de l'ingénieur.

Nous sommes maintenant en possession des éléments constitutifs des modèles économiques linéaires. Il reste maintenant à voir comment leur combinaison permet de construire un système dont on cherchera à déterminer l'évolution.

2 - LA COMBINAISON DES MÉCANISMES DE BASE

L'exemple choisi sera tiré de l'intéraction du multiplicateur et de l'accélérateur; la forme sous laquelle cette interaction sera présentée diffèrera légèrement de celle habituellement donnée [1] : le temps sera pris sous forme continue, la fonction de consommation et l'accélérateur ne seront pas complètement spécifiés, ceci pour mettre en lumière précisément la généralité qu'apportent les méthodes proposées.

Si dans une économie en état d'équilibre, on voir apparaître, à partir d'une certaine époque, une dépense gouvernementale autonome :

$$D_g(t)$$

il en résultera des mouvements du revenu, de la consommation et de l'investissement, que l'on cherche à prévoir. On y parviendra en combinant les différentes lois auxquelles obéissent ces grandeurs :

A chaque instant, l'égalité de définition du revenu

$$R(t) = I(t) + C(t) + D_g(t)$$

sera évidemment vérifiée.

D'autre part, la consommation actuelle dépend, d'après la fonction de consommation, des revenus antérieurs par l'intermédiaire d'une relation linéaire entre les niveaux de ces deux variables avec des retards de la consommation sur le revenu.

Enfin, les chefs d'entreprises décident du montant de leurs investissements en fonction de la tendance récente de la demande qui leur a été

[1] P.A. Samuelson : Interaction between the multiplier analysis and the principle of acceleration, *Review of Economic Statistics* (1939).

adressée. Si, récemment, cette demande a fortement augmenté, ils sont doublement incités à effectuer de gros investissements : d'abord pour satisfaire cette demande dans des conditions de coûts favorables, et ensuite pour pouvoir répondre à l'évolution future de cette demande, qu'ils sont tentés de prévoir encore en augmentation, par extrapolation de l'évolution passée. Il y a donc entre investissement et consommation, une relation de tendance à niveau avec décalage.

On peut représenter ces différentes liaisons causales par un graphique constitué de la manière suivante : symbolisons chacune des grandeurs par un cercle et relions par une flèche les cercles correspondant à des grandeurs liées, en portant sur la flèche l'indication de la nature de la liaison en cause (fig. 2-3). On aboutit à une représentation graphique, un graphe, dont on ne peut nier le pouvoir suggestif; il rassemble l'ensemble des liaisons mises en jeu par le modèle et permet d'en prendre facilement une vision synthétique.

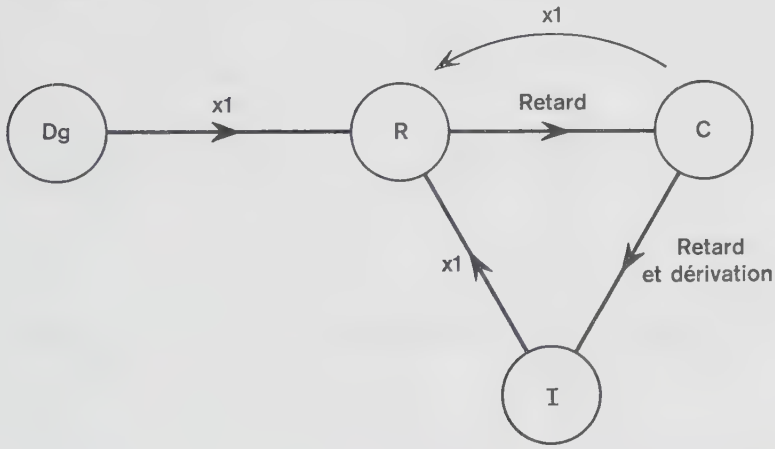

FIG. 2-3.

Il n'est pas sans intérêt de s'y arrêter quelque peu pour en tirer, sur la structure générale des modèles, des enseignements qui seront ici particulièrement clairs.

Notons tout d'abord qu'à la dépense gouvernementale D_g correspond un cercle d'où part une flèche, mais où n'en arrive aucune. Ceci est la traduction de l'évidence suivante : la variable exogène agit sur le système qui est lui-même sans influence sur elle.

Si, parallèlement, existait une variable où des flèches aboutissent, mais d'où aucune ne part, on pourrait dire que cette variable n'a aucune action sur l'évolution du système, mais qu'elle est au contraire totalement déterminée par lui, et on pourrait dans une première phase la supprimer pour

analyser le système ainsi tronqué; le comportement de cette variable s'en déduirait alors dans une deuxième étape, par l'intermédiaire des relations initialement supprimées.

Une constatation plus importante est que le schéma de l'oscillateur présente deux boucles : la première est constituée de la flèche $R \rightarrow C$ et de la flèche $C \rightarrow R$; l'autre correspond à la séquence $R \rightarrow C \rightarrow I \rightarrow R$; cette dernière montre par exemple que R concoure à la formation de C qui participe à celle de I qui lui-même contribue à celle de R. R concourt donc à sa propre détermination. C'est un feed-back, phénomène caractéristique des enchaînements dynamiques, dont le schéma précédent fournit une bonne image.

On peut, à cet égard, distinguer deux types d'enchaînements causaux, ceux où il y a un ou plusieurs feed-back et ceux où il n'y en a pas; le comportement, vis-à-vis des variations d'une variable exogène, sera très différent selon que l'on se trouve dans l'un ou l'autre de ces deux cas.

Examinons, en effet, ce qui se passe quand la variable exogène présente, à l'époque où commence l'analyse, ce qu'on appelle une impulsion, c'est-à-dire qu'elle ne quitte la valeur zéro que pour un très court instant pendant lequel elle prend une valeur élevée ; graphiquement, son aspect sera le suivant (fig. 2-4) :

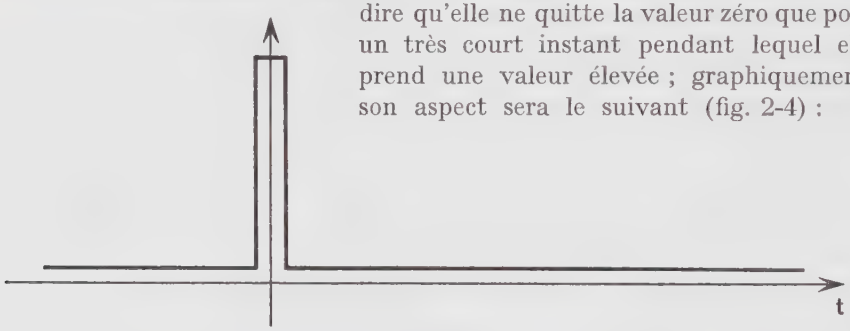

Fig. 2-4.

Dans un système ne comportant pas de boucle, les effets d'une telle impulsion s'éteindront rapidement, au bout d'un temps fini.

Prenons par exemple le schéma fictif figuré ci-dessous (fig. 2-5), qui ne contient pas de boucles :

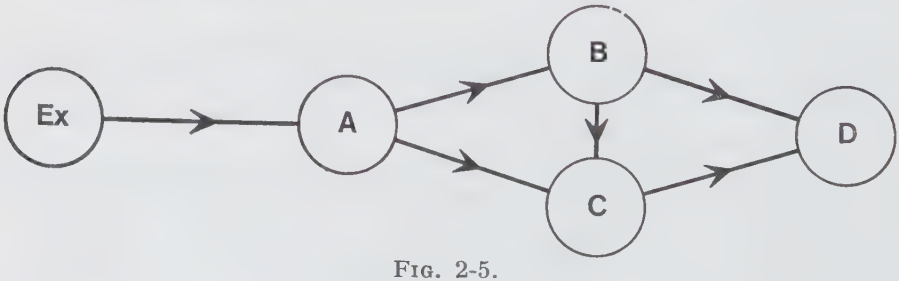

Fig. 2-5.

La forme des liaisons élémentaires n'est pas figurée; elles correspondent soit à des dérivations, soit à des décalages, soit à une combinaison des deux, mais on peut être sûr que dans la réalité, chacune de ces liaisons ne fera intervenir qu'un intervalle de temps fini. Ceci est évident pour la dérivation; pour les décalages, il serait peu réaliste de supposer que la valeur de A, à une époque donnée, influence toutes les valeurs ultérieures de B; il est plus raisonnable de considérer qu'à partir d'un certain instant t, la valeur que prend B est indépendante des valeurs de A à l'époque 0 et aux époques antérieures.

Alors, au bout d'un certain temps, tous les effets de l'impulsion initiale de la variable exogène seront épuisés et le système sera de nouveau au repos.

Si, par contre, le système présente un feed-back, qui se traduit sur le diagramme par une boucle, une impulsion initiale de la variable exogène peut entraîner un mouvement perpétuel du système même quand les décalages temporels introduits par chaque liaison élémentaire ne sont pas infinis : il suffit qu'ils ne soient pas tous nuls.

Considérons le système très simple suivant (fig. 2-6) :

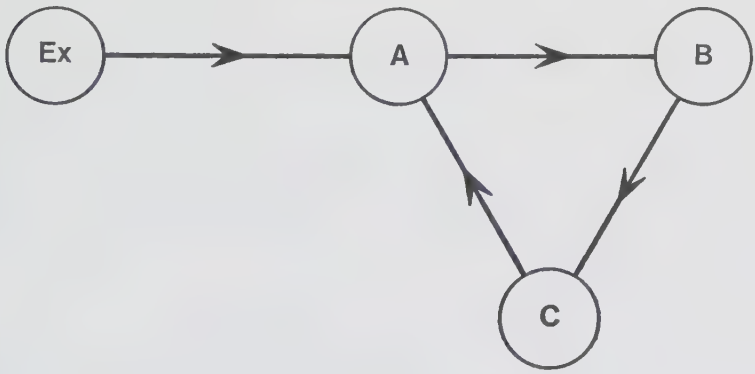

FIG. 2-6.

Quand l'effet de l'impulsion initiale issue de la variable exogène atteint C, par l'intermédiaire de A et B, A est peut-être revenu à sa valeur initiale mais la quittera de nouveau lorsque C agira sur lui; un nouveau cycle sera ainsi recréé et ceci se recommencera indéfiniment [1].

Cette caractéristique a d'importantes conséquences sur la nature des modèles qu'utilisera plus volontiers l'économiste : un système sans feed-back a besoin d'une incitation exogène permanente pour rester en mouvement; la construction théorique correspondante sera donc, dans une certaine mesure, incomplète; la variable exogène, indispensable à la continuation

[1] Notons l'analogie entre ces deux cas et ce que la théorie des graphes appelle le problème de la tension maximum, impossible en présence de boucles.

du mouvement n'y est pas expliquée, la source du mouvement reste en dehors du champ de l'étude, seul le mécanisme de sa propagation est analysé. En présence de feed-back, la situation est différente : la variable exogène peut n'avoir joué que peu de temps, elle a néanmoins suffi à mettre en mouvement une machine qui continuera à fonctionner bien après l'excitation initiale; elle a, en quelque sorte, joué le rôle du démarreur d'un véhicule; cette situation est bien préférable pour la cohérence et le caractère complet de l'explication, et s'accorde d'ailleurs avec les optiques de propagation de flux, de circuit économique, qui évoquent bien cette idée d'effet en retour où une quantité se détermine elle-même indirectement, par le truchement d'un certain nombre d'autres grandeurs.

Nous avons maintenant obtenu la plupart des renseignements qualitatifs importants relatifs aux systèmes : si l'on veut aller plus loin, il faut, passant au stade quantitatif, voir par quelles méthodes on peut déterminer leur évolution.

A cet égard, les équations de récurrence auxquelles conduit le découpage du temps en périodes sont d'un maniement relativement élémentaire : on peut d'abord facilement calculer les valeurs numériques successives que prend la quantité en cause, ce qui fournit déjà, si on a la patience de répéter l'opération pour un nombre suffisant de périodes, des indications sur l'évolution cherchée : enfin, il existe des méthodes assez simples pour obtenir l'expression algébrique de cette évolution; on sait qu'on est amené à résoudre une équation algébrique, ce qui est toujours possible, au prix de calculs peut-être pénibles à la main, mais aisément réalisables avec les machines modernes; on aboutit finalement à une combinaison de fonctions exponentielles, croissantes ou décroissantes, et de sinusoïdes; de manière plus précise, si l'équation de récurrence s'écrit :

$$a_0\, x_t + a_1\, x_{t+1} + \ldots + a_n\, x_{t+n} = 0$$

ses solutions s'expriment à partir des $n - 1$ racines r_k (supposées distinctes) de l'équation en r :

$$a_0 + a_1\, r + \ldots + a_n\, r^n = 0$$

selon la relation :

$$x_t = \sum_{k=1}^{n-1} c_k\, (r_k)^t,$$

les c_k étant des constantes dépendant des conditions initiales.

L'expression $(r_k)^t$ représente une évolution exponentielle si la racine r_k est réelle, et oscillatoire, amortie ou explosive, si la racine r_k est complexe [1].

La voie choisie ici met en jeu des relations d'un type apparemment plus complexe : ces relations comportent comme inconnues, non pas des

[1] Voir à ce sujet M. Barbut et C. Fourgeaud : *Eléments d'analyse mathématique des chroniques* (1964).

suites de nombres comme précédemment, mais des fonctions continues du temps, qui en outre interviennent non seulement en elles-mêmes, mais également par leurs dérivées, et aussi à l'intérieur de symboles d'intégration. Il s'agit alors d'équations fonctionnelles et non plus numériques, comme l'étaient, sous un certain angle, les équations de récurrence. Une transformation classique permet toutefois de se sortir de ce mauvais pas et de retomber sur des équations numériques : c'est la transformation de Laplace, qui substitue à la fonction initiale $f(t)$ une autre fonction appelée communément « transformée de Laplace » de la première, et notée $\overline{f(p)}$. Il existe des tables, des sortes de dictionnaires, permettant de passer d'une fonction à sa transformée et inversement, et ce, pour la plupart des fonctions courantes. Cette transformation jouit de propriétés remarquables qui peuvent se résumer en une phrase : aux transformations linéaires sur les fonctions correspondent des transformations algébriques sur leurs transformées : c'est ainsi que la transformée de la dérivée d'une fonction $f(t)$ s'obtient en multipliant la transformée $\overline{f(p)}$ de cette fonction par p; de même, la transformée d'une intégrale faisant intervenir le produit de deux fonctions s'obtient en multipliant leurs transformées (1).

Cette opération va donc métamorphoser les équations fonctionnelles auxquelles nous avions abouti, et qui semblaient fort embarrassantes, en équations algébriques qui fourniront l'expression de la transformée de la fonction cherchée, dont il n'y aura plus qu'à lire la formule dans la table de correspondance des transformées de Laplace.

Mais il y a plus rapide encore : si on ne s'intéresse qu'à la stabilité du système économique dans le cas où, tiré de sa situation d'équilibre pendant un instant très court sous l'action d'une force exogène, il est ensuite abandonné à lui-même, on montre qu'il évolue alors suivant une loi qui combine les fonctions sinusoïdales et exponentielles : il pourra ou non osciller, et à la longue, soit il retournera vers sa position d'équilibre initiale, soit il s'en éloignera de plus en plus; on peut, par des procédés simples, mettre en évidence le cas où l'on se trouve, et ce, à partir de la transformée de Laplace de la fonction représentant l'évolution cherchée.

Ces procédés, présentés plus en détail en Annexe I : Quelques éléments pour l'étude mathématique des systèmes linéaires, sont couramment utilisés par les ingénieurs pour étudier le comportement des systèmes qu'ils projettent de construire, qu'il s'agisse du réglage d'un radar sur l'objet qu'il suit, de la mise au point d'un procédé automatique de chauffage de locaux..., etc.

(1) Ces propriétés, ainsi que les autres propriétés caractéristiques de la transformation de Laplace, sont souvent utilisées sous le nom de « calcul symbolique », ou calcul d'Heaviside, dont les résultats furent longtemps utilisés sans qu'on les ait démontrés de manière rigoureuse.

Nous sommes donc en possession d'une méthode d'étude des enchaînements économiques, sinon très simple, tout au moins bien éprouvée et pratique; cette méthode peut être utilisée pour deux buts voisins.

Elle permet d'abord de reproduire la réalité de manière plus satisfaisante que les procédures classiques, et elle rend possible une étude plus fine des conséquences des hypothèses faites : on saisit mieux ce à quoi elles correspondent, on peut les faire varier de manière plus souple et étudier dans chaque cas l'évolution obtenue, voir si celle-ci est sensible ou non à ces hypothèses.

Mais, à côté de cet objectif d'analyse théorique, il y en a un autre, plus directement tourné vers l'action; il faut en effet se souvenir que toutes ces procédures ont été mises au point pour des ingénieurs dont le but est d'agir sur le monde physique, de l'améliorer, de le discipliner davantage; on est alors tenté de les utiliser dans une perspective de politique économique, pour l'étude de la régulation des mouvements.

3 - DEUX APPLICATIONS DES MÉTHODES PRÉCÉDENTES

Ce sont ces deux sortes d'applications qui vont maintenant être illustrées chacune par un exemple.

Le premier reprendra le modèle d'oscillateur de Samuelson et essaiera d'analyser son comportement quand on suppose que le temps coule de façon continue et quand on fait varier les hypothèses de base du modèle.

Le deuxième, inspiré des études de Philips, s'efforcera de mettre en évidence les conditions d'une régulation efficace des cycles par la politique budgétaire.

1) L'oscillateur de Samuelson

Il a déjà été présenté, et on a noté que, sous sa forme initiale, il fait un choix implicite de périodes; dans quelle mesure ce choix influe sur les résultats obtenus ?

Les égalités que pose son auteur sont les suivantes [1] :

— Définition du revenu : $R(t) = C(t) + I(t) + D_g(t)$

— Fonction de consommation : $C(t) = cR(t-1)$

— Principe d'accélération : $I(t) = v\,[C(t) - C(t-1)]$

On en tire facilement :

$$R(t) = D_g(t) + c\,(1+v)\,R(t-1) - c\,v\,R(t-2).$$

[1] P.A. Samuelson : *Interaction between the multiplier and the acceleration principle* (1939).

Cette équation de récurrence est d'un type classique; aisée à résoudre, elle permet d'aboutir à la conclusion que, pour des valeurs vraisemblables des coefficients c et v (par exemple une propension à consommer c de 0,8 et un coefficient de capital v compris entre 1 et 2), le revenu, perturbé initialement par une dépense gouvernementale nouvelle D_g, aura tendance à osciller de manière de plus en plus forte.

Il n'est pas sans intérêt d'examiner comment se module ce résultat quand on modifie les hypothèses de base. Pour le voir, plaçons-nous dans le cadre d'un temps continu; des trois relations initiales, la première est évidemment inchangée; la deuxième est relative à la fonction de consommation; des arguments déjà présentés conduisent à préférer à l'adaptation brutale qu'elle implique, une évolution plus souple, du type de celle présentée ci-dessous (fig. 2-7).

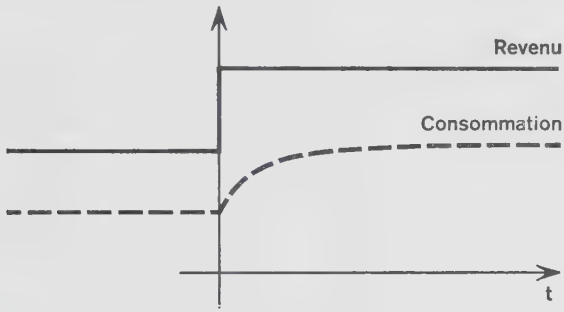

Fig. 2-7.

Toutefois, pour être plus complet, nous envisagerons également le cas d'une adaptation immédiate de la consommation au revenu.

Quant à la troisième, son origine est ambiguë; établit-elle simplement un lien entre tendance de la consommation et niveau de l'investissement induit, ou introduit-elle en plus un retard entre les deux quantités ? Dans le doute, il est préférable d'envisager successivement les deux cas.

Comment traduire ces différentes hypothèses ?

Pour la consommation : si l'adaptation consommation-revenu est immédiate, on aura évidemment :

$$C(t) = c\,R(t).$$

Si, par contre, elle se réalise avec un certain retard du type figuré ci-dessus, on peut la représenter par la relation :

$$C(t) = c\,\lambda\,e^{-\lambda t}\,R(0)$$

exprimant les consommations successives issues de la perception de R à l'instant initial; λ est un paramètre d'autant plus élevé que le retard de la consommation sur le revenu est faible.

De même, pour l'investissement induit, s'il n'y a pas de retard dans l'effet d'accélération :

$$I = v \frac{dC(t)}{dt}.$$

S'il y a dans l'effet d'accélération un décalage temporel, on peut le représenter par l'égalité :

$$I(t) = v \mu e^{-\mu t} \frac{dC(0)}{dt}.$$

donnant le flux d'investissement engendré par une variation initiale de la consommation, qui correspond à l'adaptation suivante de l'investissement à une variation brusque de la consommation (fig. 2-8).

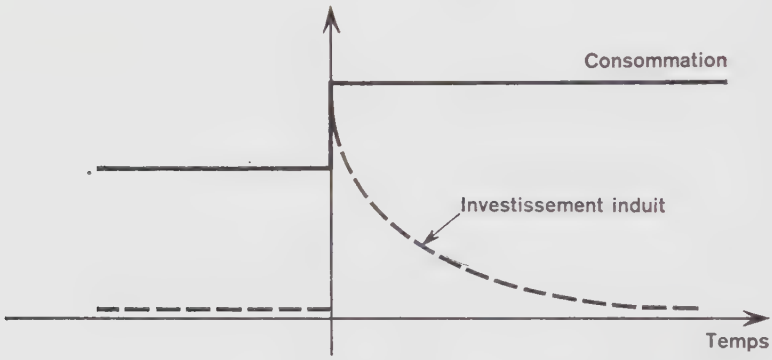

FIG. 2-8.

Utilisons la transformation de Laplace : appelons

$\overline{C(p)}$	la transformée de	$C(t)$
$\overline{R(p)}$	—	$R(t)$
$\overline{I(p)}$	—	$I(t)$
$\overline{D_g(p)}$	—	$D_g(t)$

On lit, sur une table, les transformées de :

$$c \lambda e^{-\lambda t} \quad : \quad \frac{\lambda c}{p + \lambda}$$

$$v \frac{dC(t)}{dt} \quad : \quad p v \overline{C(p)}$$

Les mécanismes économiques permettent d'écrire :

— 1re loi $R(t) = C(t) + I(t) + D_g(t)$,

— 2e loi $C(t) = c\,R(t)$

ou $$C(t) = c \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda\theta} R(t-\theta)\, d\theta$$

suivant l'hypothèse choisie pour la fonction de consommation.

— 3e loi

$$I(t) = v \frac{dC}{dt} \quad \text{ou} \quad I(t) = v \int_0^\infty \mu\, e^{-\mu\theta} \frac{dC(t-\theta)}{dt}\, d\theta.$$

On a ainsi pour chacune des hypothèses envisagées trois relations d'où il nous faut déduire l'évolution du revenu $R(t)$. Voyons ce à quoi elles conduisent :

1° Pas de retard sur l'accélérateur ni sur le multiplicateur. Alors les trois relations de base sont :

$$\begin{cases} R(t) = C(t) + I(t) + D_g(t) \\ C(t) = c\,R(t) \\ I(t) = \dfrac{v\, dC(t)}{dt}. \end{cases}$$

Il serait facile de résoudre directement ce système, mais « jouons le jeu » de la transformation de Laplace. Les relations entre transformées des fonctions : $C(t)$, $I(t)$, $R(t)$, $D_g(t)$, sont :

$$\overline{R(p)} = \overline{C(p)} + \overline{I(p)} + \overline{D_g(p)}$$
$$\overline{C(p)} = \overline{c\,R(p)}$$
$$\overline{I(p)} = \overline{p\,v\,C(p)}.$$

Système classique de trois équations à trois inconnues : $\overline{R(p)}$, $\overline{C(p)}$, $\overline{I(p)}$, d'où l'on tire $\overline{R(p)}$, la quantité qui intéresse directement :

$$\overline{R(p)} = \frac{\overline{D_g(p)}}{1 - c - p\,c\,v}.$$

Il apparaît là un résultat important et très général : la transformée cherchée s'obtient en multipliant la transformée $\overline{D_g(p)}$ de la variable exo-

gène par une fonction fixe, caractéristique des mécanismes mis en jeu, appelée fonction de transfert; cette fonction de transfert est ici :

$$\frac{1}{1 - c - p\,c\,v}.$$

2° Pas de retard sur l'accélérateur, mais retard sur le multiplicateur, les trois relations de base sont alors :

$$\begin{cases} R(t) = C(t) + I(t) + D_g(t) \\ C(t) = c \displaystyle\int_0^\infty \lambda\, e^{-\lambda\theta}\, \theta\, R(t - \theta)\, d\theta \\ I(t) = \dfrac{v\, dC(t)}{dt}. \end{cases}$$

Ce système compliqué, où les inconnues sont les fonctions $R(t)$, $C(t)$, $I(t)$, serait difficile à résoudre directement; mais la transformation de Laplace simplifiera notablement les deux dernières relations :

$$\overline{R(p)} = \overline{C(p)} + \overline{I(p)} + \overline{D_g(p)}$$

$$\overline{C(p)} = \frac{\lambda\, c}{p + \lambda}\, \overline{R(p)}$$

$$\overline{I(p)} = v\, p\, \overline{C(p)}.$$

On en tire facilement comme précédemment :

$$\overline{R(p)} = \frac{\overline{D_g(p)}}{1 - \dfrac{\lambda\, c}{p + \lambda} - \dfrac{p\,\lambda\, c\, v}{p + \lambda}}$$

et la fonction de transfert est alors :

$$\frac{1}{1 - \dfrac{p + \lambda}{\lambda\, c} - \dfrac{p\,\lambda\, c\, v}{p + \lambda}}.$$

3° Pas de retard sur le multiplicateur, mais retard sur l'accélérateur. Des calculs analogues aux précédents donneraient :

$$\overline{R(p)} = \frac{\overline{D_g(p)}}{1 - c - \dfrac{c\, v\, \mu\, p}{p + \mu}}.$$

4° Retard à la fois sur l'accélérateur et le multiplicateur; on verrait alors que :

$$\overline{R(p)} = \frac{\overline{D_g(p)}}{1 - \frac{\lambda c}{p+\lambda} - \frac{\lambda c}{p+\lambda} \cdot \frac{v \mu p}{p+\lambda}}.$$

Les formules ainsi obtenues permettent de déterminer l'évolution du revenu $R(t)$ pour toute évolution donnée a priori de la dépense gouvernementale; il suffit de chercher $\overline{D_g(p)}$ dans les tables de transformée de Laplace, de calculer $\overline{R(p)}$ par les formules précédentes d'où l'on déduira $R(t)$ à l'aide des mêmes tables lues en sens inverse; mais si nous ne nous intéressons qu'aux mouvements propres du système, c'est-à-dire à ceux qui se produisent quand celui-ci est abandonné à lui-même, après avoir subi une perturbation extérieure, on sait (*cf.* Annexe I) qu'on les obtient en annulant le dénominateur de la fonction de transfert : on calcule ainsi diverses valeurs de p.

Si elles sont réelles, le mouvement correspondant est de la forme e^{pt}, c'est-à-dire exponentiel, explosif si p est positif, amorti si p est négatif.

Si elles sont complexes, $p = q + i\omega$, le mouvement est de la forme :

$$A\, e^{qt} \cos(\omega t + \varphi).$$

Il sera alors oscillatoire, explosif si q est positif, amorti si q est négatif.

Dans le cas présent, on aboutit alors, quand la dépense $D_g(t)$ présente le caractère d'une impulsion, aux résultats suivants :

1) Pas de retard sur l'accélérateur ni sur le multiplicateur; l'évolution de $R(t)$ est de la forme :

$$R(t) = R_0\, e^{\frac{1-c}{cv} t}.$$

Elle est exponentielle, le revenu augmente constamment au même rythme. On retombe alors exactement sur le modèle de croissance de Harrod.

2) Pas de retard sur l'accélérateur, mais retard sur le multiplicateur : dans ce cas :

$$p = \frac{\lambda(1-c)}{\lambda c v - 1}.$$

On a alors une évolution exponentielle :

$$R(t) = R_0\, e^{\frac{\lambda(1-c)}{\lambda c v - 1} t}$$

mais elle n'est croissante que si $\lambda c v > 1$ ou $\lambda > 1/cv$. Dans le cas contraire,

si λ est trop faible, c'est-à-dire si le retard de la consommation sur le revenu est trop important [1], le revenu retourne lentement à sa position initiale.

Cette circonstance est assez facilement concevable : si la consommation d'un revenu additionnel s'effectue de manière très étalée dans le temps, avec un retard important sur sa perception, elle sera alors faible à chaque instant; sa contribution aux revenus futurs le sera aussi; le circuit perception-dépense ne se déroulant que très lentement, le revenu aura tendance à décroître au début, car les sommes retirées momentanément du circuit monétaire n'y sont pas réinjectées assez tôt; partant, l'investissement sera défavorisé : il y aura même en fait un désinvestissement qui contribuera encore à la chute du revenu; et le processus cumulatif ainsi engendré ramènera le revenu à sa valeur initiale; mais le calcul prouve en plus qu'il ne le fera pas descendre plus bas encore, ce qui n'était pas évident à priori.

Sans attacher une trop grande importance à ce résultat, on peut toutefois le rapprocher de situations concrètes qui se produisent lorsqu'on essaie de réanimer une économie stagnante, où les consommateurs font preuve d'un certain attentisme (λ faible), et où les entrepreneurs sont très prudents dans le montant de leurs investissements (v faible). Une politique de relance de l'activité se solde alors souvent par un échec, lorsqu'elle est abandonnée avant que la confiance des consommateurs et des entrepreneurs se soit raffermie, avant que les valeurs de λ et v soient suffisamment fortes pour entraîner la croissance, dirions-nous d'après les résultats précédents.

3) Pas de retard pour le multiplicateur, mais retard pour l'accélérateur; dans ce cas :

$$p = \frac{(1 - c)\,\mu}{c + c\,v\,\mu - 1},$$

là encore, on a une évolution exponentielle du revenu :

$$R(t) = R_0\, e^{\frac{(1-c)\,\mu}{c + c\,v\,\mu - 1}\,t}.$$

Elle sera croissante si $c + c\,v\,\mu - 1 > 0$, c'est-à-dire si $\mu > (1 - c)/c\,v$: il faut, pour cela, que la réaction des entrepreneurs à une modification de la demande, qui est proportionnelle à $1/\mu$ [2], soit suffisamment rapide; s'ils réagissent trop lentement, le revenu retournera lentement à sa position d'équilibre. Ce dernier évènement se produira également si v est faible (montant d'investissement insuffisant) ou si c est faible (revenu insuffisam-

[1] Le retard moyen T de la consommation sur le revenu est $T = \int_0^\infty \lambda t\, e^{-\lambda t}\, dt = \frac{1}{\lambda}$.

[2] En effet, le retard moyen T' est : $T' = \int_0^\infty \mu t\, e^{-\mu t}\, dt = \frac{1}{\mu}$.

ment dépensé). On se trouve donc dans un cas assez analogue à celui envisagé précédemment, et les considérations qui avaient été développées à son propos pourraient être répétées ici.

4) Retards à la fois pour l'accélérateur et le multiplicateur. Dans ce cas, les valeurs de p sont données par l'équation du 2e degré :

$$p^2 + p\,(\lambda + \mu - \lambda\, c - \lambda\, c\, v\, \mu) + \lambda\, \mu\, (1 - c) = 0.$$

Elles peuvent, pour certaines valeurs des paramètres, être complexes et conduire à des mouvements oscillatoires du revenu.

Il serait fastidieux, et de peu d'intérêt, d'examiner d'une manière générale, pour quelles valeurs de c et v ceci se produit. Considérons simplement un cas qui ne doit pas être trop éloigné de la réalité, celui où la propension à consommer c est de 0,8, le coefficient d'accélération v de 1,25 et où l'adaptation de la consommation à un nouveau niveau de revenu est à peu près achevée au bout d'un an alors que l'investissement consécutif à un changement de la consommation ne l'est qu'au bout de deux ans. Dans ces conditions, λ est de l'ordre de 4 et μ de 2 (1).

L'équation donnant p s'écrit alors :

$$p^2 - 5{,}2\, p + 1{,}6 = 0.$$

Ses racines sont réelles et positives ; on n'assiste donc pas à des oscillations, comme cela se produirait dans modèle initial de Samuelson pour les mêmes valeurs des paramètres c et v, mais à une croissance continue à un taux constant.

Il ne faudrait pas tirer de tout cela des conclusions trop rigoureuses : d'autres types de décalages que ceux qui ont été choisis sont possibles, et l'intéraction du multiplicateur et de l'accélérateur, si elle conduit à un mécanisme intéressant, n'est pas l'unique mode explicatif des fluctuations à court terme. Il n'en reste pas moins que si cette intéraction peut engendrer des mouvements oscillants, cela semble dépendre non seulement des valeurs de la propension à consommer et du coefficient de capital, comme l'avançait Samuelson, mais aussi, et peut-être surtout, des retards qui existent entre perception et dépense du revenu d'une part, entre augmentation de la demande et décision d'investir, d'autre part. On est en droit de penser à cet égard que le premier de ces retards est sensiblement plus faible que le second; on serait alors dans un cas où le modèle conduit plutôt à des mouvements continus qu'à des oscillations. Ceci serait de nature à renforcer la construction de Hicks (2) : pour celui-ci, en effet, l'économie moderne est fondamentalement instable, et tout écart par rapport à la position d'équilibre

(1) Ces valeurs correspondent à la réalisation de 98 % des effets envisagés.

(2) Hicks : *A contribution to the theory of the trade cycle* (1950).

tend à s'amplifier constamment; les oscillations que l'on observe ne sont dues qu'à l'existence de planchers, issus par exemple d'investissements sociaux incompressibles qui arrêtent la chute de l'activité, et de plafonds provenant du plein emploi qui font obstacle à une trop rapide expansion : le niveau du revenu, au lieu de suivre une évolution régulière au milieu de ces deux bornes, passe sans arrêt de l'une à l'autre en raison de son instabilité organique. Ainsi, l'intéraction entre le multiplicateur et l'accélérateur, telle qu'elle a été décrite, ne serait valable qu'entre certaines limites et devrait être remplacée par un autre type d'enchaînement dès que celles-ci sont atteintes.

2) La régulation des cycles par la politique budgétaire

On retrouve avec ce sujet le principal usage que les ingénieurs font des méthodes précédentes : c'est la conception des systèmes asservis, dont un exemple est fourni par un radar qui suit automatiquement l'objet qu'il a repéré : on a affaire à un système constitué par le mécanisme d'orientation du radar, dont l'« input » est le déplacement de l'objet et l'« output » l'écart entre l'orientation du radar et la position de l'objet, « output » qu'on cherche à rendre le plus faible possible. De même, en économie, on s'efforcera de rendre le revenu national, « output » du système, insensible à des perturbations extérieures qui en constitueront l'« input ». C'est le problème de la régulation de la conjoncture, sur lequel les méthodes d'études des systèmes asservis peuvent porter un éclairage intéressant. Le principe est évidemment le suivant : dans le cadre d'un système instable, écarté de sa position d'équilibre sous l'action d'impulsions initiales, on introduit des liaisons supplémentaires et on recherche si ces liaisons rendent le système stable, c'est-à-dire si les nouvelles oscillations sinusoïdales ou exponentielles propres, qu'on obtient aisément, sont amorties ou explosives.

L'initiateur des recherches en ce domaine est Philips [1]; celui-ci, à partir du modèle de fluctuations qu'il avait construit, a étudié les différentes régulations économiques possibles et leur efficacité. Toutefois, son modèle de base est sujet à discussion : il suppose, en effet, que la production s'adapte lentement à la demande [2]; or comme la plupart des études statistiques le montrent, c'est le phénomène inverse qu'on observe : la production est pratiquement concomitante de la demande, tout autant, sinon plus, que la consommation ne l'est du revenu. C'est pourquoi le modèle de base sera celui précédemment étudié, qui est fondé sur l'hypothèse d'un retard négligeable entre demande et production; comme on l'a vu, il conduit, pour des valeurs normales des paramètres, à des mouvements explosifs; les liaisons économiques supplémentaires, susceptibles d'assurer la stabilisation, pro-

[1] Philips : Stabilisation policy in a closed Economy, *Economic Journal* (1954).
[2] Et en particulier plus lentement que la consommation ne s'adapte au revenu.

viendront tout naturellement de l'action de l'Etat; celui-ci oppose, en effet, aux évolutions anormales du revenu, une action compensatrice retardée, qui revêt deux aspects principaux.

Elle est pour une part volontaire : quand l'activité baisse, l'Etat s'efforce de la relancer par injection de revenu, et en particulier par la mise en route d'investissements publics; de même, quand l'activité apparaît trop élevée, l'Etat est souvent amené à restreindre indirectement les investissements privés, par des contraintes d'ordre financier ou monétaire.

Mais une autre stabilisation s'exerce automatiquement par l'intermédiaire des finances publiques et aussi du commerce extérieur. En ce qui concerne les finances publiques, les dépenses sont relativement stables, hormis évidemment celles qu'on engage sciemment en raison de la conjoncture et que nous avons examiné plus haut; les recettes, par contre, sont habituellement élevées lors des périodes de haute conjoncture, en raison de l'accroissement des revenus et notamment des profits, et basses lors des crises, pour des causes inverses. Les excédents ou déficits budgétaires ainsi créés s'opposeront au mouvement qui leur a donné naissance. Le commerce extérieur peut avoir également un certain effet de stabilisation automatique : en période de crise, en raison de la baisse, ou tout au moins de la moins forte hausse, des prix intérieurs, les exportations seront facilitées et les importations découragées; les dispositions d'esprit des consommateurs ainsi que la nécessité pour les entrepreneurs d'écouler une production minima, renforceront ces tendances.

Ces politiques de stabilisation ou ces réactions automatiques ne se développent pas instantanément, mais leur action a lieu avec un certain retard : retard de prise de conscience, retard dû au délai nécessaire au jeu des circuits monétaires intéressés, etc.

C'est pour ces raisons que l'on supposera que l'action stabilisatrice vis-à-vis d'une variation brusque et momentanée du revenu global présente l'aspect suivant (fig. 2.9) :

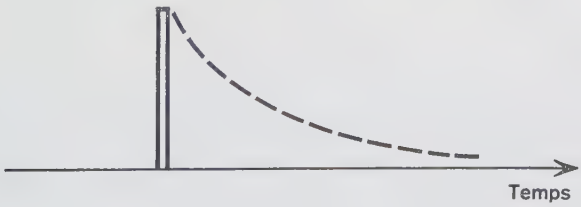

FIG. 2-9.

et peut être représentée par une formule du type :

$$S(t) = -k \int_0^\infty \nu \, e^{-\nu\theta} \, R(t-\theta) \, d\theta$$

soit
$$\overline{S(p)} = -k\frac{\nu}{p\,\lambda\,\nu}\,\overline{R(p)}$$

(le signe — indiquant qu'en principe l'action stabilisante doit s'opposer au mouvement qui lui a donné naissance).

Regardons alors, dans le cadre des hypothèses du 4e des modèles précédemment étudiés, pour quelles valeurs de k et de ν, le système, qui, comme on l'a vu, est par nature instable, devient stable. Les égalités de base deviennent :

$$\begin{cases} R(t) = C(t) + I(t) + S(t) + D_g(t) \\ C(t) = c\displaystyle\int_0^\infty \lambda\, e^{-\lambda\theta}\, R(t-\theta)\, d\theta \\ I(t) = v\displaystyle\int_0^\infty \mu\, e^{-\mu\theta}\, \frac{dC(t-\theta)}{dt}\, d\theta \\ S(t) = -k\displaystyle\int_0^\infty \nu\, e^{-\nu\theta}\, R(t-\theta)\, d\theta \end{cases}$$

La transformation de Laplace nous conduit au système équivalent :

$$\begin{cases} \overline{R(p)} = \overline{C(p)} + \overline{I(p)} + \overline{S(p)} + \overline{D_g(p)} \\ \overline{C(p)} = \dfrac{c\,\lambda}{p+\lambda}\,\overline{R(p)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overline{I(p)} = \dfrac{v\,\mu\,p}{p+\mu}\,\overline{C(p)} = \dfrac{v\,\mu\,p}{p+\mu} \times \dfrac{c\,\lambda}{p+\lambda}\,\overline{R(p)} \\ \overline{S(p)} = -k\dfrac{\nu}{p+\nu}\,\overline{R(p)} \end{cases}$$

On en tire facilement :

$$\overline{R(p)} = \frac{\overline{D_g(p)}}{1 - \dfrac{c\,\lambda}{p+\lambda} - \dfrac{v\,c\,\mu\,\lambda\,p}{(p+\lambda)(p+\mu)} + k\dfrac{\nu}{p+\nu}},$$

l'annulation du dénominateur de la fonction de transfert conduit à :

$$1 - \frac{c\,\lambda}{p+\lambda} - \frac{v\,c\,\mu\,\lambda\,p}{(p+\lambda)(p+\mu)} + k\frac{\nu}{p+\nu} = 0.$$

C'est du signe des racines de cette équation [1] que nous tirerons les cas de stabilité.

[1] Plus exactement du signe de leur partie réelle.

Il est évident que l'examen de toutes les situations que peuvent créer les différentes valeurs des paramètres c, v, λ, μ, ν et k serait très pénible. C'est pourquoi nous nous cantonnerons aux valeurs de c, v, λ, μ, déjà essayées, soit :

$$c = 0{,}8 \qquad v = 1{,}25$$
$$\lambda = 4 \qquad \mu = 2$$

et nous examinerons deux cas particuliers :

— $\nu = 4$, correspondant à une mise en œuvre « rapide» de la politique de stabilisation (retard moyen de 1/4 d'année, soit trois mois).

— $\nu = 2$, correspondant à une mise en œuvre « lente » de cette politique (retard moyen de 1/2 année, soit six mois).

Dans chacune de ces deux hypothèses, pour quelles valeurs de k il y a effectivement stabilisation ?

a) $\nu = 4$, action « rapide ». On est alors conduit à une équation qui, tous calculs faits, est :

$$p^2 + p\,(4\,k - 5{,}6) + (0{,}8 + 8\,k) = 0.$$

Il est facile de voir que les racines de cette équation ne seront négatives (ou de partie réelle négative) que si :

$$4\,k - 5{,}6 > 0$$

soit
$$k > 1{,}4.$$

b) $\nu = 2$, action « lente». On aboutit alors à l'équation :

$$p^2 + p\,(2\,k - 5{,}6) + (0{,}8 + 8\,k) = 0$$

dont les racines n'ont leur partie réelle négative que si :

$$2\,k - 5{,}6 > 0$$

ou,
$$k > 2{,}8.$$

Arrêtons-nous sur ces résultats; ils montrent que, pour être efficace, l'action stabilisatrice doit être de sens contraire au mouvement perturbateur qui l'a déclenchée, puisque k doit être positif; ce résultat était d'ailleurs facilement prévisible, et il est rassurant de constater que le calcul y conduit. Mais un minimum d'intensité est requis pour le succès de la stabilisation et ce minimum est d'autant plus élevé que cette stabilisation est tardive : son intensité minima double quand le retard passe de 3 à 6 mois.

Ainsi, d'un point de vue qualitatif, les résultats précédents sont tout à fait logiques et conformes au bon sens. Sous l'angle quantitatif, par contre, on peut s'étonner de l'ampleur de l'action à mener, qui doit être largement

supérieure à la perturbation néfaste; et encore, l'étude reste incomplète, puisqu'elle n'a pas porté sur la vitesse d'amortissement des mouvements; il faudrait, pour que celle-ci soit suffisante, que k dépasse assez largement les valeurs limites précédentes.

C'est là un point choquant qui montre que dans ce qui précède il y a, comme on dit communément, à prendre et à laisser, et il importe justement de faire la part de ce qui est à prendre et de ce qui est à laisser : il faut séparer le bon grain de l'ivraie.

On peut considérer que ce qui est à retenir, c'est l'importance des retards temporels; le raisonnement théorique montre, et l'expérience statistique la plus grossière confirme, que les liens entre grandeurs économiques sont, la plupart du temps, affectés de retards; malheureusement, on ne dispose que de peu de renseignements sur leur nature; tout au plus a-t-on une idée de leur valeur moyenne, mais sans très bien savoir s'ils sont stables ou non dans le temps; quant à leur forme précise, à la manière dont une quantité se développe puis s'éteint sous l'action d'une autre quantité, le seul guide est jusqu'ici le bon sens. Les exemples qui précèdent montrent, et c'est déjà un certain mérite, que ce stade doit être dépassé : la forme des décalages, et non pas seulement leur existence et leur valeur moyenne, peut avoir une incidence importante sur le comportement des systèmes économiques. Le traitement mathématique, par la précision des résultats qu'il permet d'obtenir, met par là même en évidence la sensibilité de ces résultats aux hypothèses, et, par conséquent, la nécessité d'un choix précis et judicieux d'hypothèses.

Ce qui, par contre, est à réviser dans l'analyse précédente, c'est, semble-t-il, l'hypothèse de linéarité. Celle-ci suppose une proportionnalité constante entre les causes et leurs conséquences, ce qui est difficile à admettre quand les effets sont susceptibles de prendre, au fur et à mesure que le temps passe, une ampleur énorme. Cette hypothèse de linéarité présente en outre certaines implications peu satisfaisantes : les évolutions qui en résultent, oscillatoires ou non, sont presque toujours, soit « divergentes », soit « convergentes » vers la valeur zéro, et n'offrent de régularité, de récurrence, que pour des valeurs très particulières des paramètres, qu'il est bien improbable de rencontrer dans la réalité; or, c'est précisément la régularité qu'on rencontre en fait, une régularité certes imparfaite, mais néanmoins fort éloignée des évolutions explosives ou amorties auxquelles conduisent les systèmes linéaires. C'est par leur approximative périodicité que se sont signalées, en premier lieu, les fluctuations conjoncturelles, et encore maintenant, celles-ci présentent une telle permanence que, quand, par exemple, les Etats-Unis connaissent une période de sept ans exempte de récession, on crie à l'événement extraordinaire.

En outre, la linéarité donne une trop grande importance à l'impulsion initiale : l'ampleur du phénomène qu'on vise à expliquer dépendrait uni-

quement d'elle; or, elle peut être de nature aléatoire, ou s'être produite à une époque très reculée : il y a là un résultat qui choque le bon sens et que contredit l'expérience; on peut bien imaginer que les mouvements aient une origine événementielle, anecdotique en quelque sorte, mais on est fortement incliné à penser que leur cours ultérieur ne dépend pas aussi étroitement de l'ampleur d'un accident imprévu, survenu peut-être plusieurs dizaines d'années auparavant.

On est donc amené à abandonner cette hypothèse de linéarité, qui est fort pratique et constitue une bonne première approximation, mais résiste parfois mal à une analyse plus fine.

CHAPITRE 3

BREF APERÇU SUR LES SYSTÈMES NON LINÉAIRES

Si, conformément d'ailleurs à la tradition, on s'est longuement étendu sur les modèles linéaires, c'est en partie à cause des facilités que présente leur traitement mathématique; les méthodes permettant de les résoudre sont variées, bien connues et d'application relativement aisée.

Il n'en est pas de même pour les systèmes non linéaires : ceux-ci forment un ensemble très vaste, trop vaste pour que des procédures générales puissent leur être appliquées : ils constituent en quelque sorte le cas général, dont la linéarité n'est qu'une restriction limitée.

En outre, les mathématiques qu'ils utilisent présentent un caractère de technicité très poussé et une présentation d'ensemble dépasserait le cadre de ce travail.

Ceci justifie la nature de ce qui va suivre et qui sera très fragmentaire : une première section exposera différentes sources de non linéarité dans les enchaînements économiques, alors que la deuxième présentera sommairement deux types de modèles non linéaires, celui de Goodwin et celui de Hicks.

1 - LES SOURCES DE NON LINÉARITÉ

La linéarité suppose une proportion constante entre l'effet et la cause; si ceci peut être admis quand le champ de variation de l'effet reste faible, il ne peut en être de même constamment; sinon, cela impliquerait que le phénomène obéit toujours à la même loi, quelle que soit son échelle; cette confortable permanence ne se rencontre que rarement; en économie, la linéarité peut, en effet, être battue en brèche sous bien des angles.

Il y a d'abord, notion classique, des seuils au-delà desquels les effets se stabilisent comme au contact de butoirs; un exemple en est donné par les planchers et plafonds d'activité dont de nombreux auteurs font la clé de l'explication des crises.

Mais, à côté de ces seuils, et très proches d'eux, n'y aurait-il pas, en économie, des quanta minima, analogues aux quanta de la physique, en deçà desquels aucune conséquence ne se produit ? Ceci est admis quand on raisonne qualitativement sur les structures. On sait que pour modifier certaines structures, il y a un minimum d'action requis; tant que l'on restera en dessous de ce minimum, rien ne se passera; ceci est bien établi en matière de décentralisation régionale, et tient également une place importante dans les théories globales du développement, comme par exemple dans celle de Rostow.

Mais ce concept n'a pas eu jusqu'ici une résonance aussi profonde dans les études à moyen ou à court terme. Une raison peut en être trouvée dans l'imprécision des statistiques existantes : une théorie, quelle qu'elle soit, a toujours le souci de s'appuyer sur des faits dûment constatés et mesurés; or, les erreurs dont sont entachées les statistiques font qu'il est bien difficile de mettre en évidence ces quantas d'actions sur courte période : si l'on constate que, par exemple, tel montant d'investissement assez faible n'a pas eu d'effet sur l'évolution du revenu, ne sera-t-on pas tenté d'imputer cela à l'imprécision éventuelle des statistiques plutôt qu'à l'existence de seuils ?

Il semble là que l'analyse théorique ait laissé de côté un champ de recherche intéressant : l'existence éventuelle de seuils peut changer profondément l'allure des enchaînements, en modifiant les conditions de stabilité des systèmes étudiés.

A ce concept de quantum minimum se rattachent étroitement certains mécanismes du type « vase de Tantale », selon une formule et un exemple empruntés à H. Guitton : un réservoir se remplit continuement tant que l'eau y arrive, et rien n'en sort jusqu'au moment où un certain niveau, un certain seuil, est atteint : alors, par déclenchement d'un dispositif approprié, le réservoir se vide brusquement dans sa totalité.

Ces oscillations sont appelées oscillations de relaxation; « une oscillation de relaxation correspond à des accumulations progressives suivies de décharge rapide ». Elles présentent la caractéristique d'être d'amplitude constante : cette dernière dépend, dans l'exemple présenté, de la structure du réservoir, de sa hauteur, et non du rythme d'arrivée de l'eau; par contre, c'est leur période qui peut varier selon ce rythme d'arrivée; ceci est en opposition totale avec ce que l'on rencontre dans les structures linéaires où la période d'oscillation est constante, et où c'est l'amplitude du mouvement qui varie avec la cause extérieure. Enfin, les oscillations de relaxation sont toujours entretenues, alors que les oscillations linéaires ne l'étaient que pour des valeurs très particulières des paramètres. Les propriétés de ces deux types présentent donc une complémentarité intéressante.

On ne peut d'ailleurs s'empêcher de rapprocher cette catégorie de mécanisme de ce que l'on a constaté lors des crises économiques récentes en France, notamment celles de 58 et 65 : on a vu, avant les crises, l'activité

économique croître en volume à un rythme régulier, assez élevé, pendant que les signes d'inflation se développaient : hausse des salaires et des prix, développement des importations; mais ces derniers phénomènes sont restés sans conséquences effectives sur la tendance du revenu national, jusqu'au moment où, semble-t-il, un certain seuil de tensions inflationnistes a été atteint : alors, un nouveau type de causalité est entré en jeu : stagnation de la production, ralentissement des hausses de prix, « purge » de l'économie en quelque sorte. Il faudrait évidemment compléter cette analyse grossière, au moins en y incluant l'action de l'Etat qui-a, en quelque sorte, accompagné ce mouvement, participant pour une part non négligeable, à la fois à la création des tensions inflationnistes et à leur résorption.

2 - DEUX EXEMPLES DE MODÈLES NON LINÉAIRES

On peut illustrer ce qui précède par deux exemples classiques de modèles de cycles faisant appel à des mécanismes non linéaires : les deux sont fondés sur la théorie de l'accélérateur et du multiplicateur; le premier, dû à Goodwin, a été l'objet d'une mise en équation et d'un traitement mathématique complet, alors que le second, celui de Hicks, n'a pas, à notre connaissance, reçu la même formalisation; celle-ci d'ailleurs obscurcirait le modèle plutôt qu'elle n'aiderait à sa compréhension, car il est tellement simple que les mécanismes qui le sous-tendent apparaissent très clairement sur une simple présentation graphique.

1) Le modèle de Goodwin [1].

La particularité du modèle ne réside pas dans le traitement du multiplicateur, qui est classique puisque l'on y pose : $C(t) = c\,R(t)$, mais dans celui de l'accélérateur.

Goodwin fait à ce sujet une distinction entre le capital désiré et le capital réel. Désignons la première de ces quantités par $\bar{k}$, la deuxième par k; l'investissement I est par définition :

$$I = \frac{dk}{dt}.$$

Le stock de capital souhaité est, suivant le principe d'accélération, proportionnel au revenu, mais il dépend également du progrès technique et, en raison de celui-ci, augmente au cours du temps à revenu donné.

Ainsi : $$\bar{k} = v\,R + at$$

d'où on tire : $$\frac{d\bar{k}}{dt} = v\,\frac{dR}{dt} + a.$$

[1] Goodwin : The Non Linear Accelerator and the Persistence of Business Cycles, *Econometrica* (1951).

On retomberait sur la forme classique du principe d'accélération si on ne tenait pas compte du progrès technique ($a = 0$) et si le stock réel de capital s'adaptait immédiatement au stock souhaité.

En fait, cette adaptation est possible la plupart du temps, sauf en deux circonstances :

1) Vers le bas quand la diminution souhaitée est plus forte que le taux d'amortissement. Il est évident que, si une entreprise en possession de 10 machines dont une est à remplacer tous les ans, voit sa demande faiblir au point que 7 machines seulement seraient seraient nécessaires, elle ne va pas mettre 3 machines au rebut : elle en arrêtera 3, se débarrassera de l'une d'elles et gardera les deux autres dans l'attente de jours meilleurs.

Appelons M ce taux maximum de diminution de l'équipement, lié aux taux d'amortissement.

2) Il y a de même un rythme extrême de croissance du capital, c'est celui qui est imposé par la capacité des industries qui fabriquent les biens d'équipement. Soit L ce rythme.

Il reste alors à relier l'investissement réel :

$$I = \frac{dk}{dt}$$

au capital souhaité $\bar{k}$. Les hypothèses de Goodwin sont alors les suivantes :

— Si le capital existant est égal au capital souhaité : $k = \bar{k}$, alors l'investissement est égal à a : on ne réalise que l'investissement nécessité par le progrès technique;

— Si ce capital est inférieur au capital souhaité, on accroîtra ce capital au taux maximum possible : alors : $I = L$.

— Si, par contre, le capital existant est supérieur au capital souhaité, on n'effectuera aucun investissement ni remplacement, et alors le capital diminuera au taux constant M.

On voit ainsi apparaître la non linéarité : l'investissement, au lieu d'être proportionnel à l'écart entre capital souhaité et capital réel, comme dans l'oscilltæur de Samuelson, présente la configuration suivante (fig. 3-1) :

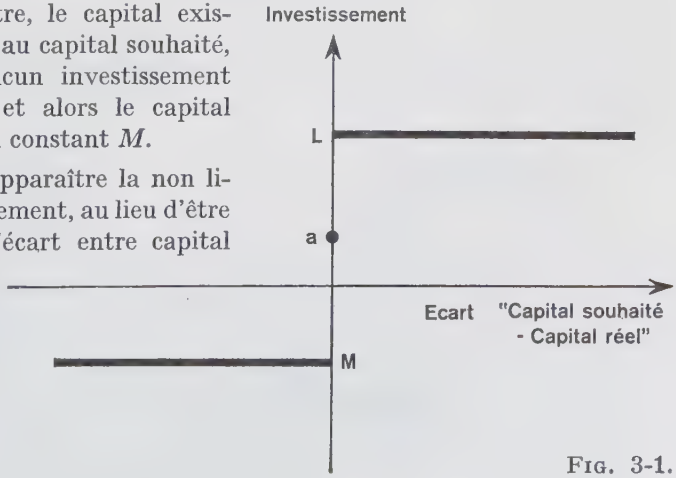

FIG. 3-1.

Il est alors facile d'assembler les pièces qui viennent d'être décrites. Appelons D_g la dépense gouvernementale constante qui met le système en mouvement :

$$R = C + I + D_g$$
$$C = c\,R$$
$$\bar{k} = v\,R + a\,t$$
$$I = \frac{dk}{dt} = \begin{matrix} -M \text{ si } k > \bar{k} \\ a \text{ si } k = \bar{k} \\ L \text{ si } k < \bar{k} \end{matrix}$$

On en tire aisément les trois cas possibles suivant la situation respective du capital réel et du capital souhaité.

	I	R	$\frac{d\,(k - \bar{k})}{dt}$
$k > \bar{k}$	L	$\frac{D_g + L}{1 - c}$	$L - a$
$k = \bar{k}$	a	$\frac{D_g + a}{1 - c}$	0
$k > k$	$-M$	$\frac{D_g - M}{1 - c}$	$-(M + a)$

On voit aisément que la valeur :

$$R = \frac{D_g + a}{1 - c}$$

issue du simple jeu du multiplicateur d'investissement, est une position d'équilibre susceptible de se perpétuer indéfiniment en l'absence de perturbation externe. Pour étudier ce qui se passe dans le cas d'une telle perturbation, il est commode de tracer ce qu'on appelle le diagramme des phases, dans lequel on porte en abscisse la quantité $k - \bar{k}$ et en ordonnée sa dérivée (fig. 3-2) :

$$\frac{d\,(k - \bar{k})}{dt}.$$

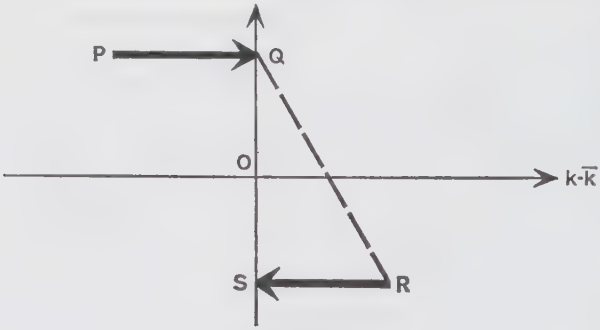

Fig. 3-2.

Supposons que, par accident, le revenu vienne par exemple à monter : on se trouvait en 0, et tout d'un coup, le capital réel devient insuffisant par rapport au capital désiré; on passe donc directement au point P, où l'investissement procèdera à un rythme constant; l'écart $k - \bar{k}$ initial s'amenuisera donc : on se dirigera de P vers Q, le revenu étant, pendant tout ce temps, constant et égal à :

$$\frac{D_g + L}{1 - c}$$

d'après le multiplicateur, puisque l'investissement est $D_g + L$.

Dès que le point Q est atteint, le revenu passe à une valeur plus faible :

$$\frac{D_g + a}{1 - c}$$

puisqu'alors $k = \bar{k}$, et que l'investissement n'est donc plus que $D_g + a$; mais cette chute du revenu entraîne un excès du capital souhaité qui correspond au revenu $\frac{D_g + a}{1 - c}$ sur le capital réel, qui reste encore adapté au revenu $\frac{D_g + L}{1 - c}$: on ne reste pas au point 0, qui représente un équilibre instable, et on passe en R. Il y a alors un désinvestissement constant qui réduit l'écart entre capital souhaité et capital réel; on se dirige de R vers S et pendant ce temps, le revenu garde la valeur constante $\frac{D_g - M}{1 - c}$; puis, de S, on passe directement en P, la position 0 étant instable, comme précédemment.

L'évolution du revenu est finalement du type suivant (fig. 3-3) :

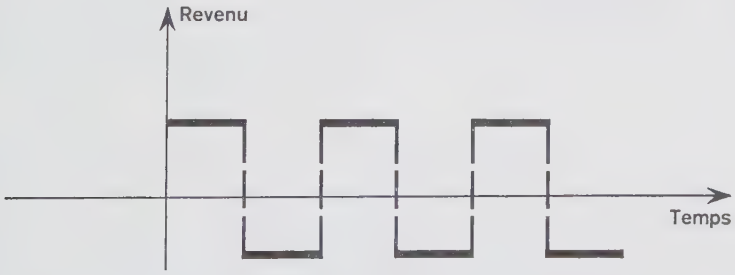

FIG. 3-3.

Si le modèle reste très grossier, il présente néanmoins des traits satisfaisants par rapport à ce que fournissaient les schémas linéaires : les oscillations se perpétuent pour toutes les valeurs des paramètres (qui sont ici, c, M, L et a), alors qu'auparavant elles n'étaient entretenues que dans des cas

très particuliers; en outre, leur amplitude est indépendante de l'importance de la cause perturbatrice initiale, alors qu'elle lui était strictement proportionnelle antérieurement; enfin, les longueurs des dépressions et des expansions ne sont pas forcément égales, contrairement à ce que l'on rencontrait dans le modèle linéaire.

2) Le modèle de Hicks.

Hicks [1], dans sa théorie du cycle, utilise l'oscillateur de Samuelson, qui conduit en général à des mouvements explosifs, mais tempère son jeu par la présence d'un plancher et d'un plafond : pour lui, le jeu du multiplicateur et de l'accélérateur ne s'effectue librement qu'entre deux limites : il y a, en effet, une ligne supérieure que le revenu ne peut guère dépasser durablement, c'est cela qui correspond au plein emploi des capacités productives; cette ligne est d'ailleurs ascendante, car, dans nos sociétés modernes, l'expansion démographique d'une part, le progrès technique d'autre part, tendent à accroître constamment la production possible, à la fois par l'augmentation des forces de travail et par une meilleure utilisation de celles-ci.

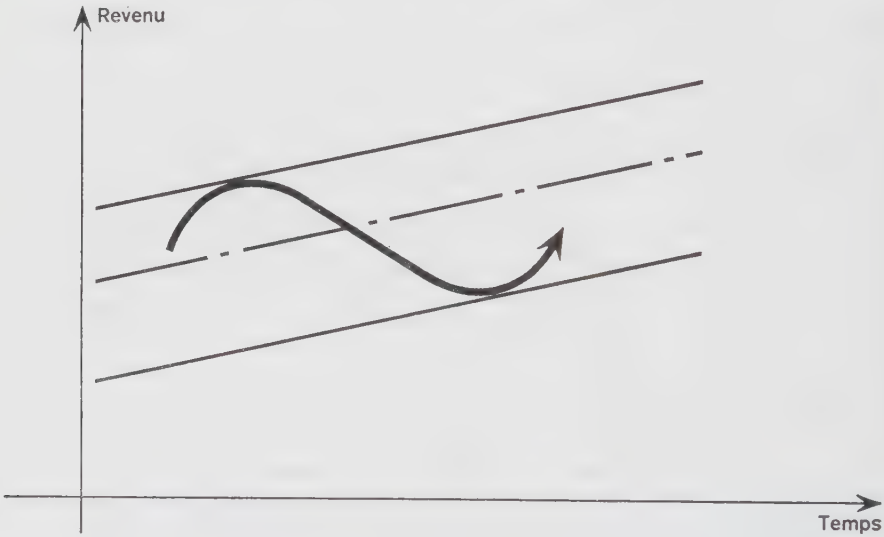

Fig. 3-4.

Il y a, de même, une ligne basse, en dessous de laquelle on ne peut descendre : un minimum d'activité est en effet rendu nécessaire par des impératifs sociaux, obligation de faire face à l'expansion démographique par la construction de logements, d'écoles, etc., lutte contre le chômage.

[1] Hicks : *A contribution to the theory of the trade cycle* (1950).

Le revenu ne pourra donc évoluer qu'entre ces deux lignes (voir fig. 3-4), qui constituent ainsi un plafond et un plancher, à l'intérieur desquelles une croissance régulière à un taux constant du type de celle de Harrod serait envisageable; mais Samuelson a précisément montré qu'un écart par rapport à cet équilibre est cumulatif et, par le jeu combiné de l'accélérateur et du multiplicateur, éloigne constamment le revenu de cet équilibre. C'est alors qu'interviennent les planchers et plafonds mis en place par Hicks. Prenons, par exemple, le cas d'un écart à la hausse par rapport à la ligne d'équilibre : le revenu en s'écartant de plus en plus de cet équilibre, atteindra à un moment, le plafond du plein emploi; alors, pendant un certain moment, il stagnera, ou tout au moins, croîtra beaucoup moins vite qu'antérieurement; l'investissement induit diminuera donc, et, par le jeu du multiplicateur, le revenu fera de même, la baisse amorcée sera cumulative et se prolongera jusqu'au moment où le revenu atteindra le plancher;

Alors, pendant quelque temps, le revenu ne baissera plus, mais même croîtra légèrement, comme croît la ligne plancher; l'investissement induit augmentera sensiblement par rapport à ses valeurs antérieures entraînant par le jeu du multiplicateur, une hausse du revenu, qui, toujours par effet cumulatif, réorientera l'activité à la hausse; le cycle est ainsi fermé. Sans nous étendre longuement sur cette théorie classique, remarquons le rôle essentiel qu'y jouent le plancher et le plafond de l'activité; c'est la non linéarité qu'ils introduisent dans les enchaînements causaux qui confère à cette théorie ses aspects séduisants : les oscillations y ont une amplitude indépendante de l'importance de la cause perturbatrice initiale, et elles se perpétuent, semblables à elles-mêmes, dans le temps.

***

Ces quelques indications sur les modèles non linéaires sont évidemment bien trop brèves; elles auront quand même permis de mettre en évidence, à la fois, leur complexité et l'intérêt qu'ils sont susceptibles de présenter pour l'analyse économique.

DEUXIÈME PARTIE

LE PRÉSENT DÉTERMINÉ IMPARFAITEMENT PAR LE PASSÉ : LA PRISE EN COMPTE DU HASARD

On vient de voir que, dans le cadre d'un univers certain, une large classe des méthodes utilisées par les ingénieurs pour résoudre leurs problèmes techniques se transposaient avec bonheur au domaine de l'analyse économique.

On ne saurait toutefois nier le caractère approximatif des schémas ainsi étudiés; ils constituent davantage une illustration de mécanismes théoriques qu'une description fidèle de la réalité.

Leur intérêt didactique est évident; ils peuvent servir à montrer la manière dont tel ou tel facteur intervient, à analyser les enchaînements causaux, mais ils ne sauraient prétendre à reproduire les faits observés, ni à en fournir une compréhension complète (1).

Leur lacune la plus importance à cet égard est qu'ils rejettent l'existence du hasard; or, celui-ci, relativement faible dans bien des branches de la connaissance humaine, est au contraire essentiel en économie, où il est indispensable d'en tenir compte; et c'est sur les modalités de son intervention que nous allons nous pencher.

Le souci de pouvoir reproduire fait entrevoir que les problèmes d'estimation statistiques prendront désormais une large place; la frontière n'est pas nette entre la partie théorique, abstraite, d'une étude, et celle où l'on confronte les résultats de cette réflexion avec l'expérience. Le travail du chercheur ne se scinde pas en deux phases séparées : l'une d'analyse théorique au cours de laquelle il bâtirait un modèle *in abstracto*, l'autre étant consacrée à la recherche de l'adéquation du modèle à la réalité. On assiste plutôt à une dialectique permanente dont la base est l'inférence statistique : il suffit pour s'en convaincre de considérer les modèles économiques généraux qui ont été élaborés dans certains pays comme les U.S.A. ou la Hollande; ces modèles forment véritablement un pont entre théorie et expérimentation (2).

C'est pourquoi cette deuxième partie ne fera pas non plus de distinction entre ces deux aspects. Les différents points sur lesquels on portera l'attention seront analysés tantôt sous l'angle théorique, et tantôt sous l'angle expérimental. L'unité ne sera pas dans les moyens, mais dans le but qui est de se rapprocher davantage de la réalité.

Dans un premier temps, on s'attachera à approfondir le concept en cause : « les aléas et leur place dans l'analyse dynamique ».

(1) Ces deux aspects sont d'ailleurs intimement liés : « Comprendre, c'est pouvoir reproduire », selon une formule frappante de J. Ullmo.

(2) Duesenberry, From, Klein, Kuh : *The Brookings quartely Econometric Model of the United States* (1965).

Puis, on s'efforcera de dégager la portée et les limites des structures aléatoires les plus simples, celles qu'on désigne souvent par le vocable général de modèles linéaires, et qu'on obtient, pourrait-on dire un peu brutalement, en introduisant le hasard comme facteur correcteur de relations algébriques habituelles : « La régression linéaire sur séries chronologiques ».

Enfin, on présentera une méthode susceptible de s'appliquer à des structures plus générales, l'analyse spectrale : « Un exemple de traitement des processus aléatoires : l'analyse spectrale. »

CHAPITRE 5

LES ALÉAS ET LEUR PLACE DANS L'ANALYSE DYNAMIQUE

[illegible]

I – LES DIFFÉRENTS TYPES D'ALÉAS

[illegible]

1) L'aléa, source de mutations

[illegible]

concept économique et ce que recouvre le chiffre par lequel on vise à le mesurer. Illustrons cela par un exemple simple, tiré de la Comptabilité nationale : celle-ci fournit une évaluation de la Production nationale qui ne comprend pas le travail domestique des femmes au foyer, et ce, pour des raisons évidentes de difficulté d'appréciation; or, d'un point de vue théorique, il n'y a aucun raison, au contraire, de considérer que cette catégorie ne fait pas partie de la Production nationale au même titre que le travail des gens de maison qui, lui, est comptabilisé.

De même, les indices de prix de gros en France sont pour beaucoup calculés à partir de prix de catalogue alors que les prix réels pratiqués en diffèrent souvent du montant des rabais et des ristournes qui sont importants et varient notamment avec la conjoncture.

2) L'aléa écart par rapport à une loi

Un autre sens dans lequel est utilisé le mot aléa est celui d'écart par rapport à une loi. Les causes d'écart sont multiples :

a) Il y a d'abord le fait que ces lois traitent, en général, de comportements humains et que l'homme garde sa part de liberté et d'appréciation individuelle : la loi n'est vraie qu'en moyenne et sur des grands nombres; dans chaque cas particulier, le facteur personnel introduira un écart par rapport au comportement moyen. En ce sens, les lois économiques sont par nature même aléatoires et probabilistes : ainsi, si la propension marginale à consommer d'une population est de 0,5, et si le revenu de cette population augmente de 10, on ne pourra pas affirmer que sa consommation augmentera de 5 mais simplement que 5 est l'augmentation la plus vraisemblable, compte tenu des caractéristiques psycho-sociologiques des individus de cette population.

b) Il se produit souvent par ailleurs des évènements à caractère extra-économique, qu'on peut difficilement tenir rigueur à l'économiste de négliger; ils viendront perturber le beau fonctionnement de la relation mise en évidence : il pourra s'agit de phénomènes naturels tels que cataclysmes, ou d'événements politiques, par exemple guerre ou tension internationale, ou encore de découvertes techniques importantes ; il est certain, par exemple, que l'apparition des transistors a bouleversé en son temps la branche des appareils électroniques de reproduction du son et a rendu caduques les meilleures études de marchés antérieures à leur venue.

c) Enfin, d'une manière générale, il est normal qu'en économie le nombre de facteurs explicatifs d'un même phénomène soient innombrables; le théoricien est obligé de choisir parmi eux les plus importants et les plus significatifs; mais les autres n'en continuent pas moins à jouer leur rôle, ce qui entraîne un écart entre les résultats du modèle et la réalité; il est d'ailleurs nécessaire évidemment que ce rôle reste faible, sinon on sera amené à remettre en question le modèle choisi.

Cet examen des raisons qui conduisent à introduire le hasard dans l'analyse doit se prolonger par une réflexion sur les formes sous lesquelles ce hasard apparaît; et là il faut faire une distinction importante : il y a d'une part le hasard pur, celui dont on ne peut absolument rien dire compte tenu du passé, qui correspond aux aléas indépendants des mathématiciens : La connaissance des valeurs passées de ces aléas ne fournit aucun renseignement sur la valeur future; et il y a à côté de ce cas extrême toute une série de situations où le hasard ne correspond plus tout à fait à la notion d'imprévisibilité que le sens commun lui donne, mais est déjà dans une certaine mesure déterminé par le passé; c'est ainsi que pour un esprit non formé à la météorologie, l'évolution de la température obéit au hasard, mais l'expérience la plus courante montre que cette grandeur évolue néanmoins de manière assez continue; et donc la température qu'il fera demain a toutes les chances d'être assez voisine de la température d'aujourd'hui : bien que dépendant du hasard, issue d'un phénomène aléatoire, elle n'est pas totalement indépendante des valeurs constatées antérieurement. En termes statistiques, il y a une certaine corrélation entre la valeur actuelle de l'aléa et l'une ou l'autre de ses valeurs passées. Gardant à l'esprit cette importante distinction, nous réserverons conformément à l'usage, les termes « hasard pur » ou « aléa pur », au cas où aucune corrélation de ce type n'existe, où en somme l'ignorance est la plus complète.

2 - LE ROLE DES ALÉAS DANS L'ANALYSE DYNAMIQUE

L'examen précédent des différents sens que peut prendre le terme « aléa » a montré au passage l'importance de la place tenue en économie par le hasard, tant par l'imprécision avec laquelle sont mesurées les différentes grandeurs que par l'imperfection des lois établies pour les lier entre elles.

Il reste maintenant à examiner la nature de son apport explicatif et les difficultés supplémentaires qu'il provoque. Ceci sera l'objet de trois développements dans lesquels les aléas interviennent explicitement : le revenu permanent, la théorie des chocs erratiques et ce que l'on a baptisé : « l'effet Slutsky ».

1) La théorie du revenu permanent

On sait que cette théorie vise à expliquer les liens entre consommation et revenu, au moyen d'une décomposition de grandeurs en une partie permanente, prévue, normale, et en une partie transitoire, inattendue, aléatoire. Symboliquement :

$$R = R_p + R_t$$

$$C = C_p + C_t.$$

C'est seulement entre C_p et R_p qu'existe une relation : $C_p = c\,R_p$, et les grandeurs transitoires R_t et C_t sont sans lien entre elles, ni avec les précédentes; ce sont, en quelque sorte, des aléas et elles jouent effectivement ce rôle dans le modèle qui, tel qu'il est présenté, ne cherche pas à les expliquer : d'un point de vue statistique, la relation entre C et R se traite comme un modèle à erreur sur les inconnues.

On sait qu'à partir de ce corps d'hypothèses on peut rendre compte des faits observés tant sur longue période qu'à court terme, et au plan global comme au plan microéconomique, ce que la théorie keynésienne de la fonction de consommation était impuissante à réaliser [1].

Nous ne nous étendrons pas davantage sur ce modèle car son caractère dynamique est peu accusé, mais il offre un exemple frappant d'une formalisation où les facteurs aléatoires jouent un rôle important.

2) La théorie des chocs erratiques

On a vu dans la première partie l'attrait théorique que présentait pour l'explication des cycles, dans le cadre d'une analyse de période, un modèle liant les valeurs du revenu national aux différentes époques par une relation de la forme :

$$R_t = a\,R_{t-1} + b\,R_{t-2} \tag{1}$$

où R_t représente le revenu de la période t et conduit pour certaines valeurs non vraisemblables des paramètres a et b, à des mouvements oscillants amortis.

Mais on a également constaté que l'allure des mouvements ainsi obtenus était, à de nombreux égards, peu compatibles avec ce que livre l'observation courante de la conjoncture économique.

On peut pallier cet inconvénient par l'introduction, au demeurant fort logique, d'un aléa dans la relation :

$$R_t = a\,R_{t-1} + b\,R_{t-2} \tag{1}$$

qui s'écrit alors :

$$R_t = a\,R_{t-1} + b\,R_{t-2} + u_t \tag{2}$$

On dit, dans ce cas, que le revenu obéit à un processus autorégressif : il dépend des revenus antérieurs R_{t-1} et R_{t-2}, mais la dépendance n'est pas stricte; la relation initiale n'est plus vraie qu'en moyenne : dans la réalité, à chaque époque, des facteurs aléatoires, symbolisés par u_t, viendront la perturber : on pourra observer des conditions climatiques particulières, ou de légères modifications du comportement, ou encore une variation du taux de progrès technique ; bref, une multitude d'éléments dont la prise en compte explicite ne serait guère possible.

[1] Voir à ce sujet : J.C. Eicher : *Consommation et Epargne* (1961).

Et, ce qui est remarquable, c'est que cette adjonction d'un terme aléatoire, satisfaisante sur le plan théorique, change complètement l'allure de l'évolution dans le temps de la quantité R_t; il suffit, pour s'en persuader, de comparer les deux courbes tracées sur le graphique joint (fig. 4-1). La courbe (1) reproduit l'évolution de R_t tel qu'elle se déduit de la relation (1) avec : $a = 1{,}1$; $b = -0{,}5$; $R_0 = 7$; $R_{-1} = 0$.

La courbe (2) est établie à partir de la relation (2) avec les mêmes valeurs de a et b et un aléa pur u_t engendré au moyen d'une table de nombres au hasard.

On peut, de ce graphique, tirer un certain nombre de constations sur l'effet de l'introduction des aléas; il faut d'ailleurs noter que ces résultats offrent un caractère général et ne se limitent pas au seul exemple numérique envisagé ici :

a) Le mouvement n'offre plus la régularité parfaite qu'il possédait avant la prise en compte d'aléas. Il présente des oscillations à caractère périodique, mais il ne s'agit plus que d'une période moyenne, non rigoureusement suivie.

b) On ne constate plus d'amortissement des mouvements; ceux-ci gardent une amplitude moyenne apparemment stable dont on pourrait d'ailleurs facilement démontrer qu'elle l'est rigoureusement.

Retenons de ceci que, d'une part, le modèle aléatoire fournit une représentation beaucoup plus satisfaisante et conforme à la réalité que le schéma purement déterministe envisagé antérieurement; et que, d'autre part, l'introduction d'aléas n'a pas pour seul effet de rendre moins lisse l'évolution de la grandeur envisagée, en la faisant osciller faiblement autour de la même courbe moyenne qu'antérieurement; mais elle modifie complètement l'allure du phénomène.

On peut enfin interpréter ce schéma aléatoire au moyen des méthodes utilisées tout au long de la dernière partie, dans lesquelles une loi économique était envisagée comme un mécanisme transformant des « inputs » donnés, correspondant aux variables exogènes, en « outputs » qui représentaient les variables à expliquer. Dans le cadre de l'oscillateur, l'input était la dépense gouvernementale autonome initiale et l'output le revenu, qui présentait des oscillations périodiques amorties; si, comme on l'a fait ici, on introduit un facteur aléatoire c'est ce facteur aléatoire qu'on peut considérer comme l'input, l'output étant toujours le revenu R, qui subit alors des oscillations « pseudo-périodiques » entretenues. La structure économique décrite par le modèle aléatoire agit comme un mécanisme, qui transforme des chocs aléatoires purs en mouvements d'aspect plus régulier sur le revenu.

Ceci peut d'ailleurs être appréhendé par un procédé mathématique : la relation (2) peut être écrite pour la période antérieure $t - 1$:

$$R_{t-1} = a\,R_{t-2} + b\,R_{t-3} + u_{t-1}.$$

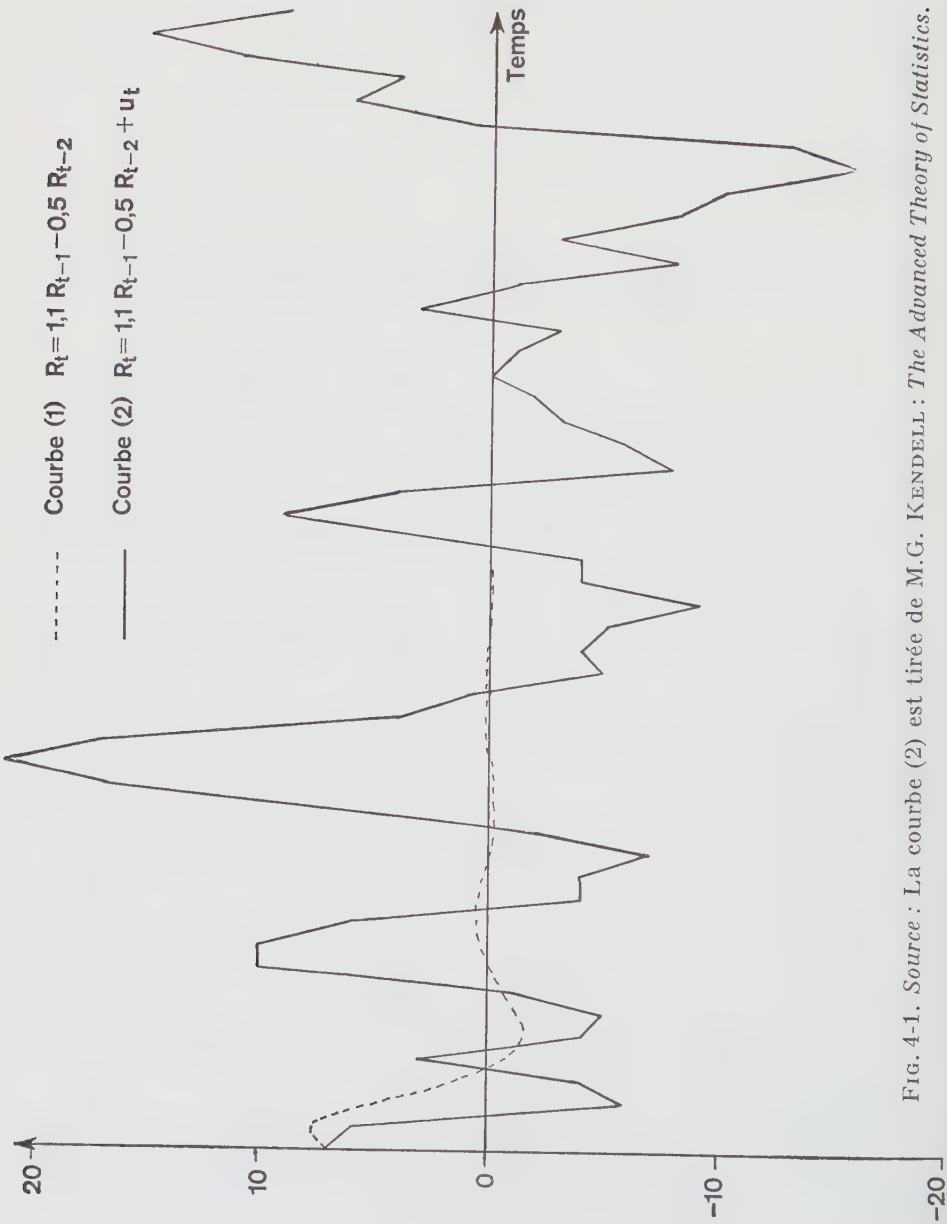

FIG. 4-1. *Source :* La courbe (2) est tirée de M.G. KENDELL : *The Advanced Theory of Statistics.*

On peut remplacer dans (2) R_{t-1} par sa valeur, ce qui donne :

$$R_t = (a^2 + b)\, R_{t-2} + a\, b\, R_{t-3} + u_t + a\, u_{t-1}.$$

Effectuons la même opération pour R_{t-2}, puis pour R_{t-3}, etc. On voit qu'à chaque fois on introduit dans l'explication de R_t des revenus correspondant à des périodes de plus en plus éloignées, et un nombre de plus en plus grand d'aléas.

On peut remonter ainsi jusqu'à l'infini et démontrer que R_t est une combinaison des seuls aléas :

$$(3) \qquad R_t = d + d_0\, u_t + d_1\, u_{t-1} + \ldots + d_n\, u_{t-n} + \ldots$$

dans laquelle les facteurs d, d_0, d_1, ... prennent des valeurs particulières qui dépendent de a et b.

En somme, le revenu R_t ne dépend que des aléas purs u_t; le rôle du modèle a été de fixer la nature de cette dépendance; dans l'exemple numérique étudié, elle est telle que :

$$\mathrm{d}_n = \frac{(0{,}5)^{\frac{n}{2}}}{0{,}62} \sin\,[(n+1)\,43{,}26\,\mathrm{g}^{\mathrm{r}}]$$

et elle conduit à partir d'une évolution erratique, purement aléatoire, des u_t, à des fluctuations assez régulières du revenu; elle joue un peu à la manière des suspensions d'automobiles qui transforment les chaos d'une mauvaise route en oscillations moins brusques et plus régulières.

3) L'effet Slutsky

Dans le paragraphe précédent, on part d'une loi déterministe ayant une expression algébrique simple et courante, à laquelle s'est superposé, plaqué en quelque sorte, un aléa pur. Nous avons, en somme, « fait du neuf avec du vieux »; puis, nous avons transformé le modèle autorégressif pour aboutir à la relation (3) :

$$(3) \qquad R_t = d + d_0\, u_t + d_1\, u_{t-1} + \ldots + d_n\, u_{t-n} + \ldots$$

dans laquelle les coefficients d_i avaient des valeurs particulières.

Mais on conçoit facilement que, par une relation du même type que (3), on puisse engendrer des séries qu'il sera impossible de ramener à une forme autorégressive.

Un exemple simple permet de le voir, qui se rapporte à ce qu'on a appelé l'effet Slutsky : supposons (l'hypothèse n'est pas totalement invraisemblable) que la production P_t d'une certaine denrée agricole dépende, en proportions

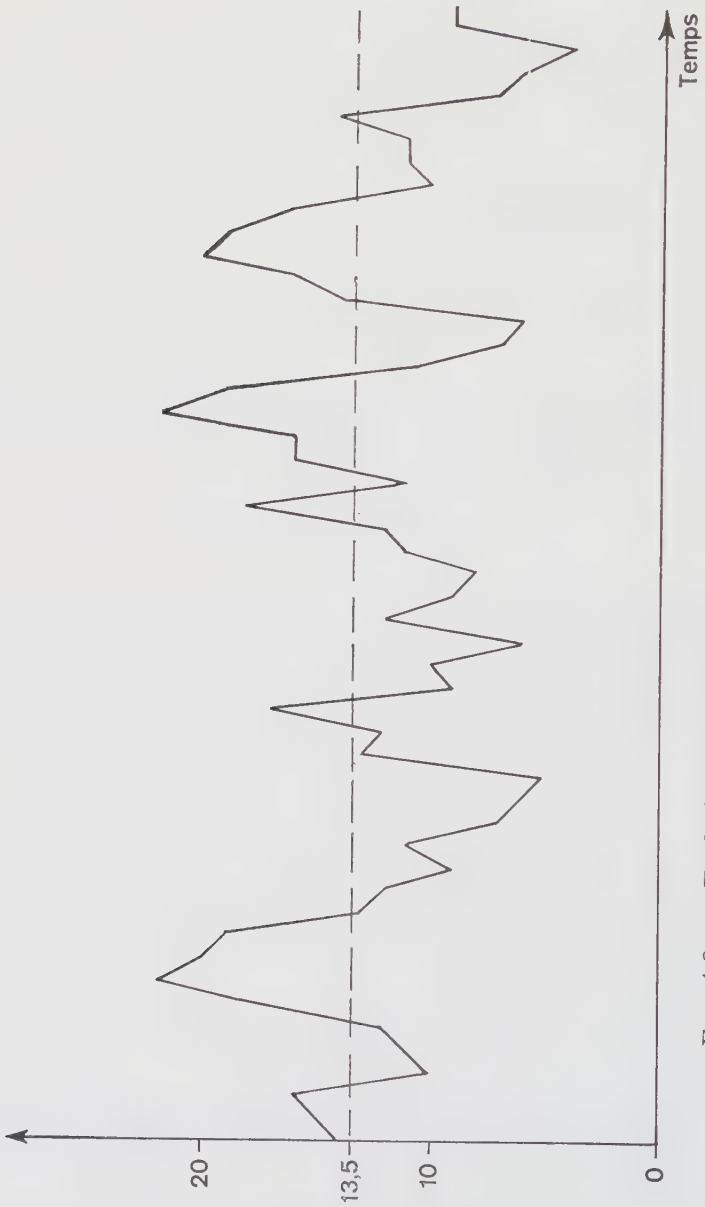

FIG. 4-2. — Evolution temporelle de $P_t = u_t + u_{t-1} + u_{t-2} + 13{,}5$.

égales, des conditions climatiques des trois périodes précédant la récolte, et que ces conditions climatiques puissent être représentées par des aléas :

$$P_t = m + a\,(u_t + u_{t-1} + u_{t-2}), \tag{4}$$

m représentant la production moyenne, supposée stable sur longue période.

On est alors en présence d'un modèle de la même sorte que celui qui apparaît sous la relation (3), avec ici :

$$\begin{aligned} d &= m \\ d_0 = d_1 &= d_2 = a \\ d_3 = d_4 &= \ldots = 0 \end{aligned}$$

et il est remarquable qu'on ne puisse pas exprimer la quantité P_t sous une forme autorégressive analogue à celle rencontrée lors de l'examen de la théorie des chocs erratiques, du type :

$$P_t = f(t) + a_0 + a_1 P_{t-1} + a_2 P_{t-2} + \ldots + a_n P_{t-n} + u_t.$$

P_t suit un processus nouveau appelé « moyenne mobile » et irréductible à une forme autorégressive. Slutsky avait mis en évidence les inconvénients qui résultent de l'utilisation de moyennes mobiles dans l'analyse statistique : cet outil, précieux, car il lisse les courbes et élimine les pointes à caractère aléatoire, a le grave défaut de créer des cycles artificiels sans réalité; c'est l'effet Slutsky, et l'on connaît les débats auxquels a donné lieu l'usage de ce procédé pour l'étude historique des mouvements économiques.

Il semble toutefois qu'on ait trop insisté sur son aspect nocif, et pas assez sur son pouvoir explicatif, qui est loin d'être négligeable. On constate, en particulier l'allure, très analogue à celle de bien des mouvements économiques, que présente le graphique ci-joint (fig. 4-2) où est figurée la quantité P_t précédente, calculée en prenant :

$$\begin{cases} m = 13{,}5 \\ a = 1 \end{cases},$$

et en tirant les aléas u_t d'une table de nombres au hasard.

Il existe évidemment bien d'autres modes de causalité probabiliste que les processus de moyenne mobile et qui comme eux échappent à une formulation autorégressive.

On est donc conduit à essayer de dépasser la transposition des relations de récurrence habituelles dans un univers aléatoire, transposition dont on verra la portée et les limites au chapitre suivant, pour rechercher des méthodes plus générales, s'appliquant à de plus larges classes de phénomènes; c'est à l'examen d'une de ces méthodes, l'analyse spectrale, que sera consacré le chapitre 6.

CHAPITRE 5

LA RÉGRESSION LINÉAIRE SUR SÉRIES CHRONOLOGIQUES

Les relations linéaires aléatoires, dont le modèle autorégressif, apparu lors de l'examen de la théorie des chocs erratiques, n'est qu'un cas particulier, présentent de multiples attraits, tant sur le plan de la théorie économique, que sur celui de l'estimation statistique; remarquons, en outre, que l'objection issue de la notion de période, valable au niveau de la construction théorique, semble ne plus tenir ici puisque, évidemment, les données statistiques sont collectées de manière discontinue.

Toutefois, comme on le verra dans une première section, ce pouvoir explicatif et cette facilité d'emploi ont des limites, qui seront illustrées dans la deuxième section par deux exemples concrets, celui de la désaisonnalisation des séries chronologiques, et celui de la prévision du parc automobile.

1 - LES LIMITES DE LA RÉGRESSION LINÉAIRE

La régression linéaire se présente quand on fait l'hypothèse que la quantité à expliquer est constituée par la somme d'une fonction linéaire des grandeurs explicatives, y_t, z_t ... et d'un terme aléatoire u_t

$$x_t = a\, y_t + b\, z_t + \ldots + u_t.$$

Disposant d'un certain nombre d'observations sur les grandeurs x_t, y_t, z_t ... il est possible d'obtenir des estimations des paramètres inconnus a, b ... En général, on retiendra les estimations $\widehat{a}$, $\widehat{b}$ ... qui rendent minimale la somme des carrés des écarts entre valeurs observées et calculées de x_t :

$$\underset{\widehat{a},\, \widehat{b} \ldots}{\text{Min}} \sum_t (x_t - \widehat{a}\, y_t - \widehat{b}\, z_t \ldots)^2$$

C'est la méthode des moindres carrés qui présente des propriétés d'optimalité remarquables (1) sous certaines conditions dont les plus importantes sont l'indépendance entre l'aléa u_t et les variables explicatives y_t, z_t ..., ainsi que l'indépendance des différents aléas u_t, $u_t + 1$ ... entre eux.

Malgré sa belle simplicité, et son aspect séduisant, la régression linéaire n'est pas une panacée pour l'analyse dynamique; cela se constate au plan des propriétés statistiques, comme à celui du pouvoir explicatif; examinons successivement ces deux points :

1) Les limites d'ordre statistique

Sous l'angle statistique, il y a deux manières d'étudier un même phénomène : la première, c'est de se placer à un instant donné et de faire porter l'analyse sur différentes unités économiques : on fait, en quelque sorte, une coupe instantanée; c'est ce que les Anglo-Saxons appellent la « cross-section »; la deuxième, c'est de suivre l'évolution d'une unité économique donnée, par une étude de « time-series ». Ainsi, en ce qui concerne la fonction de consommation, on peut analyser les budgets de différents ménages à un même instant (cross-section), ou suivre l'évolution au cours du temps du revenu et de la consommation d'un même ménage ou d'une même collectivité (time-séries).

C'est évidemment sur le deuxième moyen d'exploration que se penchera l'analyse dynamique.

Il est intéressant de voir alors, dans ce cas, les caractéristiques des types de régression auxquels on peut être conduit; le caractère temporel du phénomène étudié peut, en effet, se marquer de différentes manières, qui reviendront à jeter un pont entre ce qui se passe actuellement et les événemente antérieurs; on les passera en revue en analysant quelques explications possibles de la croissance et des fluctuations et à chaque étape on marquera les problèmes que pose l'estimation des paramètres introduits.

a) Une première hypothèse, à vrai dire fort simpliste, pourrait être de supposer que le revenu national (ou mieux son logarithme) croît d'une manière constante, à un écart aléatoire près u_t :

$$R_t = at + b + u_t.$$

Si l'on suppose que les u_t sont des aléas purs, sans lien entre eux, on peut calculer le coefficient de corrélation entre R_t et t et les paramètres a et b, par la méthode des moindres carrés, qui a alors toute sa puissance : les valeurs obtenues pour a et b sont des estimateurs centrés de variance minimale des vraies valeurs.

(1) Estimations centrées, convergentes et de variance minimale. Voir à ce sujet, E. Malinvaud, *Méthodes Statistiques de l'Econométrie* (1964).

Il faut d'ailleurs noter que, bien que le schéma proposé soit peu satisfaisant sur le plan théorique, on aboutirait certainement à un coefficient de corrélation élevé, ce qui montre combien il faut se défier d'analyses statistiques manquant de fondements théoriques solides. Mais, dans l'hypothèse faite, le caractère proprement dynamique est peu marqué.

b) Il serait déjà plus vraisemblable de supposer que dans la relation (1), le terme aléatoire u_t de la période présente est lié aux aléas passés :

$$u_{t-1}, u_{t-2}, \ldots$$

L'évolution du revenu global R_t serait alors plus conforme à ce qu'enseigne la théorie et que confirme l'expérience : le revenu oscillerait (en raison de l'autocorrélation des aléas) autour d'un trend croissant.

Mais alors en raison de l'autocorrélation des aléas u_t, l'application brutale de la méthode des moindres carrés conduirait à des erreurs sur les coefficients a et b plus élevées que ne l'indiqueraient les variances calculées, les variances vraies leur seraient supérieures; on ne peut éviter ces erreurs que par des procédures complexes nécessitant la connaissance exacte des liens entre les u_t des différentes périodes. Or, ces aléas constituent en quelque sorte un fourre-tout; ils recouvrent un ensemble de phénomènes mal connus dont on serait bien en peine de définir les liens intertemporels d'une manière précise. La méthode des moindres carrés subit ici une première défaillance : pour l'appliquer dans des conditions aussi satisfaisantes qu'antérieurement, il est nécessaire d'avoir, du phénomène à analyser, une conscience beaucoup plus aiguë.

c) Enfin, on pourrait envisager un modèle reliant le revenu présent aux revenus de quelques périodes passées par exemple :

$$R_t = a_t + b + c\, R_{t-1} + \mathrm{d}R_{t-2} + u_t,$$

u_t étant un aléa pur; on obtiendrait un graphique de R_t dont l'allure serait probablement assez analogue à celle que fournissait le type de modèle précédent; mais les soubassements théoriques d'une telle relation seraient alors très solides : le multiplicateur et l'accélérateur pourraient rendre compte de la présence de R_{t-1} et R_{t-2}; l'existence d'un progrès technique continu et la croissance démographique justifieraient l'introduction du trend linéaire $at + b$.

On serait en présence d'un processus du type autorégressif et on sait que, dans ce cas, la méthode des moindres carrés n'est plus justifiée qu'asymptotiquement, pour de grands échantillons. Quand le nombre d'observations dont on dispose est faible, cas malheureusement trop fréquent, elle fournit pour les coefficients et leur variance des valeurs biaisées. On peut en plus remarquer que même pour les grands échantillons la variance de l'estimation des paramètres, que la méthode des moindres carrés permet de calculer,

reste souvent élevée en raison de la nature même du modèle. Considérons par exemple la relation autorégressive simple :

$$x_t = a\, x_{t-1} + u_t$$

l'estimation $\hat{a}$ du coefficient a, à partir d'un échantillon de T observations aura une variance approximativement égale $\widehat{a}$:

$$\frac{1 - \widehat{a}^2}{T}$$

l'intervalle de confiance, à deux écarts type de $\widehat{a}$ sera donc :

$$\widehat{a} - 2\sqrt{\frac{1 - \widehat{a}^2}{T}} \ldots \widehat{a} + 2\sqrt{\frac{1 - \widehat{a}^2}{T}}$$

ainsi, pour $\widehat{a} = 0{,}7$ et $T = 100$, on aura : $0{,}56 < a < 0{,}84$ au seuil de 95 %, détermination évidemment fort peu précise malgré le nombre élevé d'observations.

Enfin, s'il existe un lien entre l'aléa présent u_t et les aléas antérieurs u_{t-1}, u_{t-2}, l'estimation des coefficients est particulièrement viciée et peut conduire à de graves mécomptes, si l'on ne connaît pas exactement la forme de ce lien, ce qui est évidemment le cas général (1).

Ainsi, le modèle linéaire, si bien adapté à l'analyse « cross-section » perd en « time-séries » ses belles propriétés statistiques : l'estimation correcte des paramètres qu'il comporte implique la mise en œuvre d'hypothèses à priori considérablement plus contraignantes, nécessitant une connaissance précise des phénomènes aléatoires en jeu, ce qui sera évidemment assez rarement le cas, puisqu'en général les aléas représentent tout ce qui est mal connu. L'appareil statistique fonctionne alors comme une pompe non amorcée; il pourrait produire énormément de renseignements, mais il est indispensable qu'initialement on lui en donne un peu. Or, dans le cas présent, ce « peu » est déjà beaucoup pour l'économiste.

2) Les limites du pouvoir explicatif

Mais, même si le statisticien est en mesure de tirer le plus grand profit de ses théorèmes, la relation écrite peut n'être douée que d'un pouvoir explicatif assez faible. Elle implique en effet un choix des points de temps qui influent sur le phénomène quand les quantités représentent des niveaux, ou un choix de la période unitaire quand on a affaire à des flux.

(1) Rappelons pour être complet que tout ceci ne vaut que si le processus autorégressif est stationnaire, ce qui dans le cas : $x_t = a\, x_{t-1} + u_t$ implique que $|a| < 1$. Si $|a| \geqslant 1$, on estime toujours a par la méthode des moindres carrés, mais l'estimation jouit de propriétés encore plus faibles; en particulier, la convergence est alors « en probabilité » et non plus « presque sûre » (*Cf.* Koopmans, *Statistical inference in dynamic economic models* (1950).

Les approximations ainsi faites sont, en général, passées sous silence; il n'est pas sans intérêt toutefois d'examiner leur validité.

Prenons par exemple les analyses de la fonction de consommation. Celles-ci ont pour base des recherches théoriques dont les plus connues sont celles de Keynes, de Dusenberry avec le revenu relatif, et de Friedmann qui introduit le revenu permanent; toutes ces explications font appel plus ou moins explicitement à des périodes moyennes dont la longueur n'est évidemment pas précisée. Mais les données, dont on dispose dans la plupart des pays, sont annuelles. Le statisticien est alors incité à assimiler la période moyenne de la théorie à l'année; ce postulat fait, peut-on en conclure, d'après les résultats de régressions, à l'adéquation ou l'inadéquation de l'explication envisagée ? Certes, non, car la formulation mathématique dépend de l'unité de temps choisie, et le phénomène qui a une certaine expression si on relève les grandeurs tous les 6 mois, peut en avoir une très différente, quand les relevés ont lieu tous les ans.

Ainsi, plusieurs théories, et en particulier celle du revenu permanent, conduisent à proposer le modèle :

$$C_t = a\, C_{t-1} + b\, R_t + u_t. \tag{1}$$

Supposons que cette relation, où le temps intervient de manière discrète, constitue une bonne approximation de la réalité lorsque l'unité de période t est 6 mois; il serait alors facile d'estimer le modèle si l'on disposait d'observations trimestrielles (il suffirait de considérer en bloc deux trimestres consécutifs), ou d'observations semestrielles (on appliquerait alors la relation théorique aux données brutes). Mais si l'on n'a que des données annuelles, il n'en est plus du tout de même : en effet, on ne connaît alors que $C_{t-2} + C_{t-1}$, $C_t + C_{t+1}$, $C_{t+2} + C_{t+3}$, etc... et non pas C_{t-2}, C_{t-1}, C_t, etc... individuellement; il en est évidemment de même pour les revenus. En écrivant la relation de base pour deux périodes successives et en ajoutant, on obtient :

$$(C_t + C_{t+1}) = a\,(C_{t-1}) + a\,(C_t) + b\,(R_t + R_{t+1}).$$

On connaît $(R_t + R_{t+1})$, mais ni C_{t-1}, ni C_t, qu'on sera alors tenté de remplacer en bloc par $(C_{t-1} + C_{t-2})$, quantité dont on dispose.

Le statisticien, qui essaie d'expliquer la consommation de cette année, soit $(C_t + C_{t+1})$ par le revenu de cette année $(R_t + R_{t+1})$ et la consommation de l'année passée $(C_{t-1} + C_{t-1})$ trouvera que le revenu joue effectivement un rôle, mais pas la consommation de l'année antérieure; il pourra être amené à conclure que le modèle (1) est erroné, alors qu'il est simplement appliqué avec une unité de temps défectueuse.

Il apparaît donc qu'il y a pour chaque phénomène économique une unité de temps appropriée : si l'unité de temps utilisée lui est inférieure, ou égale, on peut saisir la véritable explication; si elle est supérieure, on n'a qu'une explication partielle et tronquée, susceptible de faire apparaître

de faux écarts entre théorie et réalité. Ainsi, pour revenir à la fonction de consommation, on admet en général qu'elle est différente en longue période et en courte période; il n'est pas impossible qu'on ne puisse expliquer la consommation de courte période qu'avec des données mensuelles ou trimestrielles, et que des données annuelles fournissent des résultats hybrides dans lesquels interviennent à la fois la longue et la courte périodes, et dont le pouvoir explicatif soit finalement assez faible.

La plupart des phénomènes économiques présentent ainsi des aspects « de longue période » et des aspects « de courte période » (il est d'ailleurs possible de différencier davantage : c'est ainsi que J. Marchal distingue cinq types de période dans l'analyse du mécanisme des prix), et en choisissant inconsidérément l'unité de temps, on risque de mélanger les phénomènes relatifs à différentes périodes. Or, il y a autant de mode d'intervention des facteurs explicatifs que d'unités de temps choisies, mais la majorité de ces modes ne sont pas, à proprement parler, des explications complètes; elles constituent plutôt des aspects partiels, des points de vue incomplets sur les enchaînements réels qui ne sont saisis qu'à travers des intervalles d'observations judicieux.

C'est ce que C. Goux [1] a très clairement montré sur plusieurs exemples concrets, dont nous ne retiendrons ici que le suivant : étudiant les liens entre la consommation d'électricité d'une part, la température et la production industrielle d'autre part, il est conduit à la relation :

$$\Delta_t C = a \Delta_t T + b \Delta_t P$$

le symbole Δ_t indiquant que la grandeur en question intervient par ses différences entre des époques distantes de la durée t, et il analyse l'influence respective des deux facteurs explicatifs quand on fait varier cette durée t. Il constate que, quand t est faible, de l'ordre de 1 mois, la production industrielle joue peu, et la consommation d'électricité est principalement expliquée par la température; par contre, quand t est élevé, de l'ordre de 12 mois, c'est l'effet inverse qui se produit : la température n'a que peu d'influence, c'est la production industrielle qui apparaît comme le principal facteur explicatif. L'auteur en conclue donc, très justement, à l'existence d'un effet de courte période, dû à la température et d'un effet de moyenne période, dû à la production industrielle.

C'est là une preuve de ce que les résultats d'une analyse de régression fournissent une explication, non pas absolue, mais relative à l'unité de periode choisie. Pour certains de ces choix, ici $t = 1$ mois et $t = 12$ mois, on a des phénomènes purs, pour d'autres, par exemple $t = 6$ mois, on obtient un mélange hétérogène.

[1] C. Goux : *L'horizon prévisionnel*, Thèse (Paris, 1965).

Est-ce à dire que l'explication ne peut pas en être une, que la vérité est multiple ? ce serait à notre avis conclure trop vite, et la formulation des lois en temps continu semble pouvoir nous sortir d'embarras.

Il est certain que l'analyse par périodes ou en des points de temps régulièrement espacés est rendue obligatoire par le mode d'enregistrement des données concrètes. Mais, il est non moins évident que la vie économique présente une continuité plus grande : la masse monétaire existe à chaque instant, et non pas seulement en fin de mois; le revenu national ne reste pas constant au cours d'une année, ni la production industrielle au cours d'un mois. On retrouve là les arguments longuement développés au cours de la première partie qui plaident en faveur d'une prise en compte du temps sous la forme réelle qu'on leur connaît, c'est-à-dire sous la forme continue. Et ne serait-il pas plus satisfaisant pour l'esprit, quand on vise à une explication dynamique, de bâtir une relation théorique dans laquelle le temps serait continu et d'examiner seulement ensuite comment on peut adapter cette relation aux données discontinues dont nous disposons, plutôt que d'écrire cette relation directement en temps discontinu, comme on le fait presque toujours ?

Signalons à ce propos une propriété très générale démontrée par Philips [1] qui permet de faire le lien entre l'analyse en temps continu et la formulation par période plus propice aux estimations statistiques : tout système linéaire stochastique en temps continu de la forme :

$$x_i(t) = \sum_{j \neq i} \int_0^\infty \omega_{ij}(h)\, x_j(t-h)\, \mathrm{d}h + \xi_i(t)$$

se ramène, quand on observe les variables $x_i(t)$ à des intervalles discrets, à un modèle aléatoire du type habituel :

$$x_{it} = \sum_{j,\theta} a_{i,j,\theta}\, x_{j,t-\theta} + \sum_{\theta} b_{i,\theta}\, \xi_{i,t-\theta} \tag{4}$$

les $a_{i,j,\theta}$ et $b_{i,\theta}$ dépendant des fonctions ω_{ij}, des $\xi_i(t)$, et, bien sûr, de l'intervalle d'observation choisi. Ce dernier point a d'ailleurs une certaine importance : si l'intervalle change, les coefficients doivent normalement changer (c'est ce que l'on observe dans l'exemple précédent relatif à la consommation d'électricité) et plusieurs régressions linéaires effectuées sous la forme (4) avec des intervalles de temps divers présenteront des différences bien que l'explication du phénomène reste unique.

Ces considérations se généralisent facilement au cas des systèmes d'équations et nous conduisent au cœur de discussions qui ont fait couler beaucoup d'encre parmi les économètres. Si l'on interprète les lettres, non comme

[1] Philips : The estimation of parameters in systems of Stochastic differential equations, *Biometrika* (1959).

des scalaires, mais comme des vecteurs, on a affaire, non plus à une seule égalité, mais à un ensemble de plusieurs égalités liant les différentes variables, c'est-à-dire à un modèle. On voit alors d'après (4) qu'un modèle explicatif dynamique à plusieurs équations se présentera sous la forme d'une chaîne causale récursive, dans laquelle la première des grandeurs du modèle est déterminée par les valeurs passées de toutes les grandeurs, la deuxième l'étant à partir de la première et des valeurs passées, etc.; on peut donner des modèles récursifs la représentation suivante :

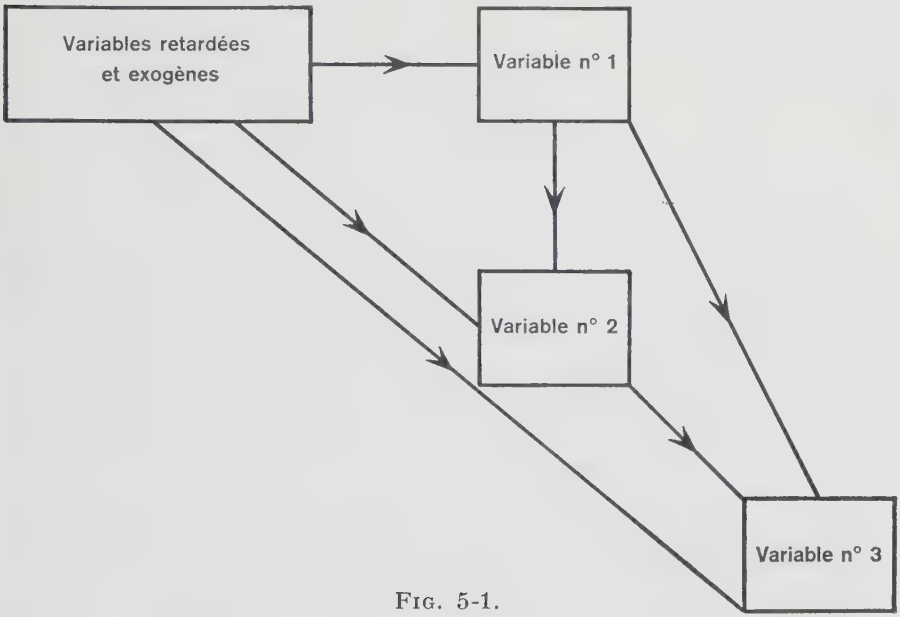

FIG. 5-1.

et un exemple simple en est fourni par le schéma du cobweb qui s'exprimera par les égalités suivantes :

Offre :

$$q(t) = a\,p(t - \theta) + bz(t) + c$$

la quantité $q(t)$ d'un produit agricole offert sur le marché dépend des conditions climatiques $z(t)$ et du prix constaté antérieurement $p(t - \theta)$; plus ce dernier était élevé, plus les agriculteurs ont été tentés d'ensemencer des surfaces plus grandes;

Demande :

$$p(t) = a'\,q(t) + b' \quad \text{avec} \quad a' < 0$$

qui correspond à la courbe de demande : plus les quantités offertes $q(t)$ sont élevées, plus le prix $p(t)$ qui s'établira sur le marché sera bas.

On a alors la séquence causale :

$$\left.\begin{array}{l}\text{Prix antérieur}\\ \\ \text{conditions climatiques}\end{array}\right\} \longrightarrow \text{quantités offertes} \longrightarrow \text{prix actuel}$$

Ces modèles récursifs seront souvent, dans la pratique, assimilés à des modèles interdépendants, où les différentes variables en question se déterminent mutuellement; ainsi, dans le cas précédent de la fixation du prix sur un marché agricole, le mécanisme de l'offre et de la demande pourrait être traduit suivant le schéma habituel par :

$$q(t) = a\,p(t) + b\,z(t) + c \qquad \text{(loi d'offre)}$$

$$p(t) = a'q(t) + b' \qquad \text{(loi de demande)}$$

Mais la validité de l'assimilation correspondante sera liée à un certain nombre d'hypothèses; ici, par exemple, il sera nécessaire que le délai d'adaptation de la production au prix antérieur soit faible par rapport à la période d'enregistrement des données, de façon qu'on puisse le tenir pour négligeable.

En outre, d'un point de vue statistique pour l'estimation des différents paramètres, cette assimilation est soumise à un certain nombre de conditions, mises en évidence en particulier par Strotz, Wold et Bergstrom, dans une série d'articles parus notamment dans la revue *Econometrica*.

Il n'est pas sans intérêt d'illustrer ces considérations générales par l'analyse de deux problèmes particuliers, d'une part la désaisonnalisation des séries chronologiques, qui montrera bien à la fois l'intérêt de l'analyse de régression et les difficultés qu'elle soulève, et d'autre part la prévision du parc de véhicules automobiles qui mettra en évidence l'intérêt de lier les analyses « cross-section » et « time-séries ».

2 - APPLICATION A LA DÉSAISONNALISATION DES SÉRIES CHRONOLOGIQUES

On sait que la plupart des grandeurs économiques sont affectées de fluctuations annuelles régulières appelées variations saisonnières; leur amplitude est, en général, suffisamment forte pour rendre difficile l'observation des autres mouvements, en particulier des fluctuations à court terme; cet inconvénient est bien ressenti des conjoncturistes qui s'efforcent donc de purifier les informations statistiques en en éliminant les variations saisonnières.

Deux méthodes peuvent être envisagées pour cela : la première, la plus séduisante, pour l'esprit, partirait de la remarque que les variations saisonsières ont évidemment des causes, par exemple la température pour la vente des vêtements, et qu'il suffit de tenir compte de ces causes, en examinant la manière dont elles agissent. Mais il faudrait alors se livrer à une analyse d'une extrême finesse, qui pourrait difficilement recevoir d'application pratique en raison de l'insuffisance en quantité et en qualité des informations statistiques disponibles. C'est pourquoi tous les procédés qui ont été envisagés jusqu'ici partent d'une autre idée, beaucoup moins ambitieuse : puisque ces mouvements saisonniers sont réguliers et introduisent une certaine périodicité dans les séries observées, contentons-nous d'éliminer cette périodicité sans en chercher l'origine qui, au fond, ne nous intéresse pas directement; on sent que cette procédure sera plus aveugle et fournira moins de renseignements que la précédente; ainsi, si un mouvement saisonnier vient à se modifier, elle ne le décèlera pas immédiatement, alors que la connaissance des sources de la saisonnalité aurait peut-être permis de prévoir sa modification; mais c'est la seule applicable en l'état actuel de nos connaissances.

Dans cette ligne, deux courants se dégagent; le premier, plus empirique, repose sur l'utilisation de moyennes mobiles; c'est celui qui a reçu le plus d'applications; le second, encore peu utilisé, viserait à intégrer le mouvement saisonnier dans une explication complète de la chronique, ce qui permettrait l'utilisation de tests statistiques qu'il est impossible de mettre en œuvre autrement.

Les procédés utilisant les moyennes mobiles sont bien connus depuis les travaux de J. Shiskin aux U.S.A. et de J. Meraud en France; ils reposent sur l'idée que la chronique à désaisonnaliser x_t se décompose en :

— Fluctuations aléatoires u_t,
— Mouvement saisonnier périodique s_t,
— Mouvement extra-saisonnier, cycle + trend : f_t,

soit :

$$x_t = f_t + s_t + u_t$$

et partent de la remarque que dans le cas d'un mouvement extra-saisonnier linéaire, la formation de moyennes mobiles d'une longueur égale à la périodicité saisonnière (par exemple une longueur de 12 si les données x_t sont mensuelles) élimine le mouvement saisonnier s_t, laisse intact l'extra-saisonnier f_t, et affaiblit l'importance de la composante aléatoire u_t.

Sur ces bases, la méthode se développe de la manière suivante : après rectification manuelle des valeurs aberrantes de la chronique, on forme, non pas la moyenne mobile sur 12 mois, qui présenterait l'inconvénient de n'être pas centrée, mais la moyenne sur 13 mois, en donnant aux 2

mois extrêmes de la moyenne mobile la pondération 1/2. Ainsi, de la série initiale x_t, on passe à une série :

$$y_t = \frac{1/2\, x_{t-6} + x_{t-5} + \ldots + x_t + \ldots + x_{t+5} + 1/2\, x_{t+6}}{12}$$

plus courte que la précédente puisqu'elle n'existe ni pour les six premiers mois, ni pour les six derniers mois de la série initiale. On forme ensuite les « rapports saisonniers » :

$$r_t = \frac{x_t}{y_t}.$$

On rassemble tous les rapports saisonniers relatifs à un même mois.

Si, pour une même mois, ceux-ci ne présentent pas d'évolution marquée dans le temps, on calcule leur moyenne s'_t qui sera le coefficient saisonnier provisoire du mois considéré; s'ils présentent une évolution temporelle régulière ou une coupure à partir d'une certaine année, on tient compte de ces phénomènes : le coefficient saisonnier provisoire pour le mois considéré aura alors une expression variable avec l'année :

$$s'_t = a\, t + b$$

ou

$$s'_t = \begin{cases} a & \text{si} \quad t < t_0 \\ b & \text{si} \quad t_0 \leqslant t \end{cases}$$

On obtient ainsi une première série de coefficients saisonniers s'_t pour chacun des 12 mois de l'année.

Leur somme sur une année civile est ramenée, par proportionnalité, à 1 200, pour qu'en moyenne, série brute et série désaisonnalisée aient la même valeur.

Ceci permet de calculer un premier extra-saisonnier :

$$f'_t = \frac{x_t}{s'_t}.$$

Cet extra-saisonnier pourra présenter cependant des imperfections et des irrégularités, dues à des erreurs d'appréciation dans la fixation des coefficients saisonniers provisoires; pour corriger ces défauts, on forme une moyenne mobile sur 5 mois de l'extra-saisonnier f'_t, soit :

$$f''_t = \frac{f'_{t-2} + f'_{t-1} + f'_t + f'_{t+1} + f'_{t+2}}{5}.$$

On calcule les nouveaux rapports saisonniers :

$$r_t = \frac{x_t}{f''_t}$$

d'où l'on tire, suivant les mêmes procédés que lors de la première étape, les coefficients saisonniers définitifs s_t et la série désaisonnalisée définitive :

$$f_t = \frac{x_t}{s_t}.$$

Différents reproches peuvent être faits à cette méthode, mais le plus important est qu'elle n'est justifiée en toute rigueur que pour des séries dont la composante extra-saisonnière est strictement linéaire, et les fluctuations aléatoires u_t nulles.

Si, comme ce sera le cas en pratique, il n'en est pas ainsi, la méthode fournit bien sûr des coefficients saisonniers et permet de calculer une nouvelle série « désaisonnalisée », mais on ignore dans quelle mesure cette dernière correspond bien au mouvement extra-saisonnier réel; certes, les extra-saisonniers obtenus dans la pratique ne contredisent pas la connaissance à priori, qu'on en pouvait avoir à partir d'informations extérieures, mais on ne sait pas chiffrer l'erreur probable commise; or, une modification très légère des coefficients saisonniers altère sensiblement l'évolution de la série désaisonnalisée, notamment aux points de retournements qui peuvent se trouver déplacés de plusieurs mois; ceci est d'autant plus grave que c'est justement pour une meilleure appréhension de ces points critiques que la désaisonnalisation est entreprise : c'est en effet à ces moments-là que le mouvement saisonnier obère le plus l'observation.

Ces inconvénients ont conduit à rechercher des procédés plus élaborés, susceptibles de donner lieu à un calcul des erreurs d'estimation. L'initiateur des recherches en ce domaine est G. Th. Guilbaud qui a très clairement montré, dans sa publication classique sur « l'étude statistique des oscillations économiques » (1), qu'on ne pouvait estimer correctement la composante saisonnière et obtenir des intervalles de confiance pour la série désaisonnalisée qu'en se donnant la forme de la composante tendancielle. Cette dernière a donné lieu à diverses hypothèses que nous allons passer en revue.

G. Th. Guilbaud a traité le cas de chroniques où l'extra-saisonnier était de forme linéaire : $at + b$.

Ceci ne peut évidemment convenir pour toutes les séries économiques; les plus importantes d'entre elles, si elles connaissent bien une croissance régulière à long terme, n'en présentent pas moins des fluctuations cycliques mal représentées par une telle hypothèse.

On peut pallier cet inconvénient en supposant que le terme aléatoire u_t présente une certaine autocorrélation; l'extra-saisonnier s'écrit :

$$at + b + u_t$$

et si, à une époque, la série est en dessous de sa tendance ($u_t < 0$), il y a de fortes chances pour qu'il en soit de même à l'époque suivante ($u_{t+1} < 0$).

(1) *Cahiers du séminaire d'économétrie* **1** (1951).

G. Morlat [1], de son côté, a montré qu'un grand nombre de séries économiques, en particulier les séries de production d'électricité, pouvaient être convenablement représentées par l'hypothèse que leur accroissement d'un mois sur l'autre obéissait à un processus autorégressif du premier ordre : si x_t est la série initiale (ou mieux, son logarithme) on aura, en posant $x_t - x_{t-1} = z_t$:

$$z_t = \rho\, z_{t-1} + m + u_t$$

où u_t est un aléa pur.

Cette idée rejoint un certain nombre de théories économiques que nous avons examiné antérieurement, d'après lesquelles les mécanismes des fluctuations conduisent à lier la grandeur actuelle aux valeurs passées de cette même grandeur, soit par exemple pour le revenu national R

$$R_t = a_1 R_{t-1} + a_2 R_{t-2} + \ldots + v_t. \tag{2}$$

On peut toutefois s'étonner, à la suite d'ailleurs de G. Morlat, qu'il suffise de relier l'accroissement d'un mois à celui du mois précédent, alors que la théorie propose des liaisons beaucoup plus étalées, s'étendant sur des durées de l'ordre de l'année. Il semble que cette différence puisse s'expliquer par l'étendue de temps sur laquelle porte les observations; les désaisonnalisations embrassent rarement plus de 10 ans, car les mouvements saisonniers se déforment dans le temps et il ne serait pas raisonnable de traiter dans le même moule des époques trop éloignées. Or, en 10 ans, on n'a, en France tout au moins, qu'un cycle, qui évidemment ne se présentera pas comme une régularité statistique : les corrélations correspondantes ne peuvent pas être mises en évidence; elles ne pourraient l'être que sur des périodes d'analyse beaucoup plus longues, de l'ordre de 40 ans; on disposerait alors de 6 à 7 cycles, ce qui est bien le minimum pour que l'on puisse prendre en compte statistiquement leur existence.

Il se dégage de cela une conclusion importante : c'est que la composante tendancielle à mettre en évidence pour la désaisonnalisation correspond à des mouvements à très court terme : elle doit représenter des liens qui se nouent à l'échelle du mois ou de quelques mois.

Ceci fait comprendre l'intérêt d'un autre modèle proposé par D. Bachelet et G. Morlat [2] et qui s'appuie, lui, sur une analyse à court terme : quand on examine l'évolution au mois le mois de séries statistiques, on constate la présence de fluctuations fortement erratiques, ayant le même aspect que celui qui résulterait d'erreurs de mesure. L'idée est alors de distinguer

[1] G. Morlat : Modèle pour les chroniques économiques mensuelles, *Revue de Statistique appliquée* (1963).

[2] D. Bachelet et G. Morlat : Modèle à deux aléas pour les chroniques économiques (1965).

dans la chronique en question x_t, une part « permanente » y_t et une part « transitoire » u_t en posant :

$$x_t = y_t + u_t,$$

u_t représentera un ensemble d'événements à caractère purement temporaire, sans effet sur l'évolution ultérieure de la chronique, qui pourront avoir toutes les causes que nous avons recensé pour les aléas : phénomènes accidentels, aléas climatiques, erreurs de mesure; ils seront évidemment d'autant plus sensibles que la surface couverte par la grandeur x_t sera plus faible : ainsi, on peut s'attendre à ce que, importants dans chaque indice de production élémentaire, ils soient faibles au niveau de l'indice général de la production industrielle.

Reste encore à définir la loi d'évolution de la quantité y_t. G. Morlat et D. Bachelet posent :

$$y_t = y_{t-1} + m + v_t$$

la partie permanente de la chronique s'accroît à chaque période d'une quantité aléatoire pure, mais dont la moyenne m est stable. On peut juger cette hypothèse rigide, mais il n'en reste pas moins que des séries artificielles engendrées de cette manière reproduisent bien l'aspect des séries que nous livrent les statistiques.

Nous avons ainsi trois modèles qui imposent aux composantes tendancielles de faire partie d'une classe donnée. A cette composante tendancielle on ajoute, comme d'habitude, le mouvement saisonnier s qui pourra être supposé constant, ou bien varier dans le temps selon une certaine loi. Détaillons un peu l'appareil statistique à mettre en œuvre dans chaque cas pour estimer les paramètres des relations :

1) Composante tendancielle linéaire

La série s'écrit alors :

$$x_t = at + b + s_{(t)} + u_t \tag{1}$$

u_t étant un aléa pur.

On applique alors la méthode des moindres carrés pour déterminer a, b, et les coefficients saisonniers s_t [1]. Tous les tests d'analyse statistique linéaire s'appliquent alors intégralement : test de signification d'un coefficient, analyse de la variance et de la covariance, test sur le coefficient de

[1] L'application de la méthode des moindres carrés est rendue possible par l'artifice suivant : soit s_j le coefficient saisonnier du mois j; appelons p_j une série chronologique auxiliaire qui prend la valeur 1 pour les mois j et la valeur 0 pour les autres mois. Alors la relation précédente s'écrit : $x_t = a\,t + b + \sum_{j=1}^{j=12} s_j\, p_j\, t + u_t$ et les s_j apparaissent ainsi sous forme de coefficients de régression habituels.

corrélation. On peut également imposer aux aléas u_t des conditions moins restrictives, par exemple supposer qu'il y a un lien entre u_t et u_{t-1}. Les procédures d'estimations sont alors plus longues et moins précises, mais elles reposent toujours sur la méthode des moindres carrés et ne présentent pas de difficulté particulière.

2) Composante tendancielle à accroissements autocorrelés

Alors, si x_t est la chronique de base :

$$(x_t - x_{t-1}) = \rho\,(x_{t-1} - x_{t-2}) + m + s_{(t)} + u_t$$

là encore, la méthode des moindres carrés permet de déterminer ρ, m et les coefficients saisonniers $s_{(t)}$; mais, elle n'est plus justifiée qu'asymptotiquement; il en est de même des tests habituels que l'on peut effectuer sur la relation trouvée.

3) Modèle à deux aléas

$$x_t = y_t + u_t$$

$$y_t = m + s_{(t)} + v_t.$$

Ici, en raison de la présence des deux aléas u et v, les paramètres du modèle ne peuvent plus être estimés comme ceux d'une régression linéaire. D. Bachelet et G. Morlat ont trouvé les estimations du maximum de vraisemblance et leurs variances dont les expressions assez compliquées ne seront pas reproduites ici.

A partir des renseignements ainsi obtenus, il est facile pour chacun des modèles envisagés de répondre aux questions-clés suivantes, pour lesquelles la méthode des moyennes mobiles restait muette :

1. Les coefficients saisonniers d'un mois donné sont-ils stables ou varient-ils dans le temps ?

2. Quel est l'intervalle de confiance pour chaque valeur de la série désaisonnalisée ?

Signalons toutefois un obstacle : en toute rigueur, la validité des tests effectués ou des intervalles de confiance calculés est subordonnée à l'exactitude du modèle posé au départ. Or, il est bien difficile de dire, à priori, si telle série concrète obéit à un modèle plutôt qu'à un autre. Mais ce cercle vicieux est le lot habituel du statisticien, constamment obligé de tirer des conclusions à partir de modèles dont il ignore s'ils sont vrais ou faux. Une grande importance est donc accordée à la robustesse des méthodes, c'est-à-dire à leur faible sensibilité aux hypothèses.

Ainsi, dans le cas présent, il faudrait examiner si à partir d'une même série réelle on aboutit à des résultats différents en suivant l'une ou l'autre des différentes méthodes; si les intervalles de confiance de la composante ten-

dancielle sont très voisins, on sera évidemment tenté de leur accorder un certain crédit.

Faute d'une telle étude qui demanderait des moyens matériels importants, on en est réduit à faire quelques remarques d'ordre général :

La première est qu'il serait intéressant de combiner le 2e et le 3e modèles, qui sont d'un certain point de vue complémentaires; en effet, le 2e modèle introduit des accroissements autocorrélés, le 3e les suppose indépendants, mais, par contre, retient la possibilité d'une composante transitoire, ce que ne fait pas l'autre.

On serait alors conduit à proposer pour la représentation de la chronique un corps d'hypothèses du type suivant :

$$\begin{aligned} x_t &= y_t + u_t \\ x_{t-1} &= y_{t-1} + u_{t-1} \\ y_t &= y_{t-1} + m + s_{(t)} + v_t \\ v_t &= \rho\, v_{t-1} + w_t. \end{aligned}$$

L'estimation des paramètres d'un tel modèle est théoriquement possible par la méthode du maximum de vraisemblance (1), mais les calculs numériques nécessaires seraient assez volumineux.

Les modèles précédents présentent toutefois deux limitations : la première tient aux caractéristiques données à la composante tendancielle, la deuxième a trait à l'estimation des coefficients saisonniers.

La composante tendancielle est examinée d'un point de vue extérieur; on ne cherche pas à l'expliquer, à trouver des causes possibles, mais simplement à la reproduire au mieux; on le voit au fait que dans ces modèles aucune variable exogène n'est introduite; on peut alors se demander s'il est vraiment nécessaire de raffiner ces modèles endogènes et s'il ne vaudrait pas mieux introduire d'autres variables susceptibles d'expliquer la composante tendancielle, comme le fait par exemple l'E.D.F. en corrigeant les consommations d'électricité de l'effet de température.

Enfin, rappelons que les coeffifients saisonniers sont calculés à partir d'un nombre relativement faible d'années d'observation. Les tests les plus utiles à leur sujet sont ceux qui permettent de savoir s'ils sont fixes, s'ils varient linéairement, ou s'ils subissent des sauts brusques. Or, la question à laquelle ces tests statistiques répondront est au fond la suivante : peut-on être sûr que tel coefficient varie linéairement ? ou : peut-on être sûr qu'il subit un saut brusque à telle époque ? Il est à prévoir qu'en raison de la faiblesse de l'échantillon sur lequel portera le test (une dizaine d'observations, une par année), celui-ci sera rarement concluant, et fournira le plus souvent une réponse dubitative.

(1) Voir à ce sujet WHITTLE : Estimation and information in stationnary time series, *Arkiv für Matematik* (1953).

L'usage exclusif de la statistique risque donc de laisser dans un état d'impuissance auquel on sera toujours conduit à suppléer par la prise en compte qualitative des informations extérieures dont on dispose sur la chronique étudiée.

Ceci amène finalement à douter de la possibilité de trouver une méthode passe-partout de désaisonnalisation, susceptible de s'appliquer à toutes les chroniques et de fournir sur elles des renseignements suffisamment précis.

Ce rapide survol des problèmes posés par la désaisonnalisation des séries économiques aura ainsi permis d'illustrer certaines des affirmations antérieures; il est apparu notamment que la régression linéaire devait souvent céder la place à des méthodes plus complexes et moins satisfaisantes pour l'esprit, et que, de toute façon, les hypothèses que l'on est obligé de faire ne s'imposent nullement d'elles-mêmes, mais sont la conséquence d'un choix à priori toujours difficile.

3 - LA PRÉVISION DU PARC DE VÉHICULES AUTOMOBILES

Dans toute ce qui précède, l'étude du phénomène temporel en cause était effectuée uniquement à partir de séries chronologiques. Mais dans certains cas, une analyse en coupe instantanée peut se révéler également nécessaire; un bon exemple en est fourni par la prévision du parc automobile.

On traitera essentiellement ici du parc de voitures particulières à usage non commercial; ces dernières constituent l'énorme majorité du parc automobile total et de l'ensemble de la circulation routière; la prévision de ce parc intéresse à la fois l'ingénieur routier qui doit y adapter le réseau de routes et d'autoroutes, et le constructeur automobile pour lequel elle constitue une base de départ de son étude de marché [1].

Une analyse préliminaire de bon sens permet de définir les trois variables essentielles susceptibles d'influer sur le parc : ce sont la population, le revenu, et le temps; on tient compte de la population, et par-là même on élimine son effet, en étudiant, non pas le parc lui-même, mais le taux de motorisation, c'est-à-dire le nombre de véhicules pour 100 habitants; les deux autres variables peuvent faire l'objet de deux sortes d'analyse.

La première se limite à comparer l'évolution passée du taux de motorisation à celle du revenu national et du temps. Les deux dernières variables sont très étroitement correlées, et il apparaît impossible de distinguer leurs effets. On ne conservera donc que l'une d'elles, le temps par exemple; le taux de motorisation suit dans le temps une courbe en S, qui est représentée de manière tout à fait convenable par une logistique, dont les paramètres

[1] Voir sur le sujet le rapport particulier « Routes de rase campagne et voirie en milieu urbain » du Ve Plan.

peuvent se calculer par une méthode des moindres carrés. On obtient ainsi un ajustement d'excellente qualité, qui reproduit très correctement l'évolution passée du taux de motorisation pour la plupart des pays développés. Tout ceci ne fait intervenir que des séries chronologiques.

On peut toutefois penser que la méthode qui vient d'être présentée n'explique guère. Si elle fournit une description correcte du passé, elle n'apprend que peu de chose sur les raisons qui ont fait ce passé; et on peut craindre que la régularité mise en évidence ne soit que fortuite, et vienne à être mise en défaut par modification d'une des causes structurelles qui sont précisément laissées dans l'ombre. On voudrait donc bien aller plus loin et mettre en évidence des paramètres qui aient davantage de sens que les coefficients d'une formule mathématique. Pour ce faire il est nécessaire de saisir les comportements individuels et de les analyser selon certains critères, ce qui est le propre de l'analyse en coupe instantanée, en « cross-section ». Celle-ci permettra, par une enquête auprès des ménages, d'analyser de manière précise la variable « taux de motorisation ». de définir sa loi de variation selon certaines caractéristiques du ménage tels que le revenu, le lieu de résidence, la catégorie socio-professionnelle du chef de famille, etc., on obtient ainsi une sorte de table à entrées multiples qui fournit, à partir des principales caractéristiques du ménage, son taux de motorisation; mais il apparaît que la loi ainsi définie par ces tables n'est pas stable dans le temps; au contraire elle se modifie constamment : pour des caractéristiques de ménage données, le taux de motorisation croît avec le temps, traduisant un phénomène de pure diffusion de l'automobile. On peut d'ailleurs étudier cette évolution, au moyen des méthodes habituelles des séries chronologiques par comparaison de tables analogues à la précédente, mais observées à des intervalles de temps différents; cette comparaison permet de prévoir l'évolution future des dites tables, et en particulier de fixer la table qui sera valable lors de l'année pour laquelle on veut faire une prévision. Ayant par ailleurs déterminé les répartitions futures des ménages selon leurs caractéristiques principales, revenu, lieu de résidence, catégorie socio-professionnelle, on en déduit le taux de motorisation de l'époque, et cela à partir d'une explication raisonnée des faits, donc plus fiable.

On voit bien là la place tout à fait prépondérante qu'a prise la coupe instantanée qui fournit à cette étude les données structurelles de base, l'aspect d'évolution dans le temps n'apparaissant plus que comme un moyen de prendre en compte un certain résidu, celui qui tient à la non-stabilité des comportements individuels, et qui se traduit par une évolution lente et régulière des données structurelles de base.

CHAPITRE 6

UN EXEMPLE DE TRAITEMENT DES PROCESSUS ALÉATOIRES : L'ANALYSE SPECTRALE

Alors que les méthodes précédentes visaient en quelque sorte à réduire la part d'aléas que contenait la chronique étudiée, le point de vue qui fera l'objet du présent chapitre est radicalement contraire; il consiste à considérer que la chronique est engendrée dans sa totalité par un schéma stochastique : la valeur x_t est en elle-même une variable aléatoire.

On pourrait penser que cette optique constitue un recul par rapport à la précédente, qu'il y a là une sorte de démission, un aveu d'impuissance. En fait, il n'en est rien. En effet, si x_t est une variable aléatoire, sa loi de probabilité peut dépendre, et dépendra en général effectivement, des valeurs antérieures prises par la chronique ou des valeurs d'une autre chronique également stochastique. On retombe ainsi sur les schémas explicatifs antérieurs, mais on peut également en recouvrir bien d'autres.

On serait peut-être également tenté de penser que si la donnée première est une loi de probabilité, celle qui définit la variable aléatoire x_t à partir des valeurs antérieures de x_t et des valeurs d'une autre chronique, on est alors ramené à l'étude classique des variables aléatoires; on ne serait pas confronté avec des procédés nouveaux, mais simplement à une application nouvelle de procédés anciens. Ceci est certes vrai pour une part, mais le fait que l'on considère non plus une seule variable aléatoire, mais une suite temporelle de variables aléatoires, conduit à mettre l'accent sur d'autres problèmes susceptibles de solutions propres.

Deux considérations permettront de le comprendre : la première est que les lois de probabilités des différentes variables que sont les valeurs de la chronique aux divers points de temps dépendent d'un même schéma;

elles font partie d'une même classe. Si, par exemple, la loi du processus est la suivante :

$$x_t = \begin{cases} 0 \text{ avec la probabilité } 1/3 \text{ si } x_{t-1} = 0 \\ 1 \quad — \qquad — \quad 2/3 \text{ si } x_{t-1} = 0 \\ 0 \quad — \qquad — \quad 2/3 \text{ si } x_{t-1} = 1 \\ 1 \quad — \qquad — \quad 1/3 \text{ si } x_{t-1} = 1 \end{cases}$$

on définit ainsi individuellement la loi de probabilité de chaque variable x_t, mais on définit aussi de façon plus générale une classe de lois de probabilité.

En outre, si x_t a une loi de probabilité, il en sera de même de l'ensemble de la chronique, qui résulte de la juxtaposition des différents x_t lorsque le temps varie; cette chronique est en somme une fonction du temps, $x(t)$, à laquelle on attachera des probabilités; au lieu de considérer séparément les différentes variables aléatoires numériques x_{t-1}, x_t, ... on s'attachera à la fonction aléatoire $x(t)$ dont on pourra chercher la probabilité pour qu'elle oscille indéfiniment, ou qu'elle tende vers zéro, ou qu'elle augmente sans cesse, etc.

Ainsi, l'objet de l'étude se déplace : d'une variable aléatoire et d'une loi de probabilité, on passe à l'analyse d'une fonction aléatoire et d'une classe de lois de probabilité, l'une et l'autre étant englobées sous le terme général de processus aléatoire.

Les processus aléatoires constituent une catégorie évidemment très générale, et on est bien forcé de particulariser ceux dont on s'occupe. Nous choisirons ici les processus stationnaires, car ce sont eux surtout qui ont été jusqu'ici l'objet de l'attention des mathématiciens et des économistes, et nous nous concentrerons plus spécialement sur leurs propriétés spectrales, en nous efforçant d'ailleurs de faire le moins possible appel aux développements mathématiques, qui sont concentrés dans l'Annexe III : notions d'analyse spectrale.

La section 1 sera consacrée à une présentation générale de ces processus stationnaires, ainsi qu'à l'énoncé de leur principale propriété : la décomposition spectrale; dans la section 2, on examinera rapidement les problèmes que pose l'estimation des spectres des chroniques expérimentales; l'analyse de certaines applications de l'analyse spectrale aux séries économiques sera développée dans la section 3.

1 - LES PROCESSUS STATIONNAIRES

On sait qu'un processus est stationnaire quand la loi qui régit la valeur de chacune des variables aléatoires dont il est la succession, est indépendante de la date t. Eclairons cette définition par un exemple simple : considérons le rendement d'un individu vis-à-vis d'un nouveau travail; ce rendement fluctue d'un jour à l'autre suivant la santé de l'individu, son état psycho-

logique, etc. C'est donc en quelque sorte une variable aléatoire temporelle, pour l'évolution de laquelle on peut distinguer deux phases : la période d'apprentissage, et la période postérieure à l'apprentissage. Dans chacune de ces phases, la production horaire obéit à une loi différente et conduit à un processus particulier; celui qu'on observe pendant l'apprentissage n'est pas stationnaire, alors que celui qui se réalise ultérieurement l'est. En effet, pendant l'apprentissage, l'habileté augmente et en moyenne le rendement sera d'autant plus élevé que le temps s'écoulera; ceci ne veut pas dire évidemment que le rendement d'aujourd'hui est certainement supérieur au rendement d'hier, mais simplement qu'il est très probable qu'il le soit. En langage de probabilité, l'espérance mathématique croît avec le temps, donc la loi change avec le temps et le processus n'est pas stationnaire.

Après l'apprentissage, au contraire, le rendement est indépendant de l'époque à laquelle on le considère; bien sûr, il est peut-être lié à celui de la veille et des jours précédents, mais il sera en moyenne toujours le même, et la loi qui le détermine à partir des rendements précédents ne fait pas intervenir explicitement la date, mais simplement des différences de date.

Mathématiquement, et pour nous limiter aux caractéristiques du second ordre, l'espérance mathématique, la variance et la covariance de la série sont indépendantes du temps :

$$E\,x\,(t) = m$$

$$\sigma^2\,x\,(t) = \sigma^2$$

$$E\,x\,(t)\,x\,(t - a) = \gamma\,(a).$$

En se cantonnant à l'étude de tels processus, on peut espérer obtenir des propriétés remarquables, et c'est effectivement le cas : un théorème important, dû à Cramer, assure que les chroniques qui suivent une loi de cette nature sont décomposables en une somme d'oscillations sinusoïdales dont les caractéristiques, amplitudes et décalages relatifs, sont aléatoires et indépendants d'une de ces sinusoïdes à l'autre. En général, il y aura un très grand nombre, une infinité, de telles oscillations, dont chacune aura une importance très faible, infiniment petite, et le processus est dit alors « indéterminable », par opposition aux processus « déterminables » constitués d'un nombre fini d'oscillations sinusoïdales dont chacune aura alors une amplitude finie. Les raisons de ces appellations sont simples : un processus déterminable étant la superposition d'un nombre fini de sinusoïdes, celles-ci peuvent, au bout d'un temps d'observation suffisant, être déterminées complètement, et les valeurs ultérieures que prendra le processus sont parfaitement prévisibles; par contre, les processus indéterminables se composent d'une infinité de sinusoïdes; pour fixer complètement les valeurs ultérieures de la chronique, il faudrait déterminer chacune de ces sinusoïdes, ce qui est impossible à partir d'un nombre fini d'observations, d'où l'appellation d'« indéterminable ».

Les amplitudes des différentes oscillations, qui sont des variables aléatoires, peuvent être définies par l'étendue des valeurs qu'elles peuvent prendre, c'est-à-dire par leur variance. A chaque oscillation de période donnée correspond une variance et cette correspondance définit ce qu'on appelle le spectre du processus envisagé; les décalages entre les différentes sinusoïdes sont quelconques; il n'y a pas plus de raisons pour que deux oscillations présentent leur maximum en même temps plutôt qu'à des instants différents.

En termes mathématiques toutes ces propriétés s'expriment ainsi : on peut définir une fonction $X(\omega)$, aléatoire, telle que

$$x(t) = \int_{-\pi}^{+\pi} e^{i\omega t} \, d\, X(\omega)$$

où $e^{i\omega t}$ est l'exponentielle imaginaire représentative d'une oscillation [1], et $X(\omega)$ est une variable aléatoire à accroissements non correlés, c'est-à-dire que

$$E\,[dX(\omega_1)\,\overline{dX(\omega_2)}] = 0 \quad \text{si} \quad \omega_1 \neq \omega_2$$

et si $\omega_1 = \omega_2 = \omega$:

$$E\,[dX(\omega)\,\overline{dX(\omega)}] = dF(\omega)$$

— si $dF(\omega)$ est nul sauf en un nombre fini de points, le processus est déterminable,

— si $f(\omega) = \dfrac{dF(\omega)}{d\omega}$ existe, le processus est indéterminable, et $f(\omega)$ est le spectre.

Ces résultats sont déjà assez frappants, mais il y a mieux : prenons deux processus stationnaires distincts, dont les liens sont également stationnaires, c'est-à-dire indépendants de la date; ces liens peuvent alors être décomposés en liens entre les différentes composantes sinusoïdales qui constituent chacun d'eux; et on démontre un théorème remarquable d'après lequel chacune des composantes sinusoïdales du premier processus n'est liée qu'avec la composante sinusoïdale de même période du deuxième processus et absolument pas avec les autres. Ce lien prend la forme d'une corrélation entre les amplitudes des deux composantes en question, et d'un décalage moyen entre elles.

D'un point de vue mathématique, si x_t et z_t sont les deux chroniques stationnaires en question, la stationnarité des liens s'exprime, au second ordre, par le corrélogramme, qui est alors stationnaire

$$E\,(x_t\,\bar{z}_{t+\theta}) = m\,(\theta)$$

[1] Les divers modes de représentation des oscillations sinusoïdales sont détaillés et expliqués en Annexe II : note sur la représentation des oscillations sinusoïdales.

et la propriété énoncée s'écrit :

$$E\,[\mathrm{d}X(\omega_1)\,\overline{\mathrm{d}Z(\omega_2)}] = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \omega_1 \neq \omega_2 \\ \mathrm{d}\Gamma(\omega) & \text{si} \quad \omega_1 = \omega_2 \end{cases}$$

$$\frac{\mathrm{d}\Gamma(\omega)}{\mathrm{d}\omega} \quad \text{peut s'écrire} \quad C(\omega)\,e^{i\varphi(\omega)}\,[f_x(\omega)\,f_z(\omega)]^{\frac{1}{2}}.$$

$C(\omega)$ mesure la corrélation entre les amplitudes des deux oscillations de fréquence ω, et $\varphi(\omega)$ leur décalage. $C^2(\omega)$ est appelé la « cohérence ».

On conçoit l'intérêt que de telles propriétés peuvent présenter pour l'économiste dont le vieux rêve est de découper les mouvements économiques en oscillations de périodes différentes et d'analyser ensuite les rapports qui existent entre les oscillations des diverses grandeurs; il est donc primordial de voir dans quelle mesure la théorie des processus stationnaires peut s'appliquer aux séries temporelles économiques.

Les conditions de stationnarité au second ordre d'un processus sont : stabilité de la moyenne, stabilité de la variance et stabilité de l'autocorrélation. Portons notre attention successivement sur chacune d'elles.

On peut être sceptique sur la stabilité en moyenne des mouvements économiques; il y a d'abord l'existence des mouvements saisonniers, en vertu desquels par exemple l'indice de la production industrielle est toujours plus faible en août qu'aux autres moments de l'année; ensuite, la plupart des chroniques présentent une croissance continue, un trend.

En fait, les mouvements saisonniers n'ont presque rien d'aléatoire; ils sont d'une régularité quasi parfaite, qui fait que leur observation sur quelques années permet de les prévoir ensuite d'une manière très précise; on peut donc sans inconvénient les considérer comme issus d'un processus stationnaire déterminable : ces processus se composent d'une somme d'un nombre fini de sinusoïdes, à priori quelconques; mais une fois que le processus est engagé, ces sinusoïdes sont bien fixées et leur observation, en un nombre de points de temps suffisamment grand, permet de les déterminer complètement.

L'existence de trends sur la plupart des chroniques économiques est une objection plus grave; il est banal de constater que les mouvements démographiques, les évolutions des prix, des quantités produites, du niveau de vie, des signes monétaires présentent une tendance générale à la croissance. Remarquons toutefois que la notion de trend est essentiellement relative à la longueur de la série prise en compte : le trend que l'on constate sur des données journalières, recensées pendant une durée de 1 mois, apparaîtra à l'échelle annuelle comme une portion d'un mouvement saisonnier périodique; la tendance générale qui se dégage de l'observation sur un an de quantités mensuelles, sera en fait une des phases des fluctuations à court terme. Enfin, les évolutions régulières que l'on constate sur des périodes

de l'ordre de vingt ans sont souvent assimilées à des portions de cycles longs.

On ne saurait toutefois pousser trop loin ces considérations. Il est certain que le niveau de vie moyen en France a fortement augmenté depuis le début de notre ère, et de nombreuses autres grandeurs ont eu également sur une très longue période, une tendance de base nettement caractérisée. Mais, si l'existence pour la plupart des séries d'un mouvement de fond régulier est indéniable, ce mouvement sera souvent masqué dans la pratique par des trends apparents qui proviendront en fait d'un mouvement cyclique qu'on n'a pas saisi dans sa totalité. Et quand la série présente un trend véritable, l'écart entre cette série et son trend sera dépourvu de tendance à long terme, et pourra souvent être considéré comme stationnaire; au lieu de porter son attention sur la série initiale x_t qui connaît une tendance à long terme, par exemple linéaire, on s'occupera de la série :

$$y_t = xt - (at + b)$$

différence entre x_t et son trend.

La présence de trend n'en constitue pas moins fréquemment un obstacle théorique sérieux à l'application de l'analyse spectrale, et il faudra dans chaque cas, analyser soigneusement ce problème avant d'effectuer brutalement les calculs : il sera nécessaire, en conjuguant la réflexion théorique et l'observation empirique de se poser les questions suivantes :

1° La série présente-t-elle un trend véritable ?

2° Si oui, peut-on déterminer ce trend ?

3° Enfin, l'écart entre la série et son trend peut-il raisonnablement être considéré comme stationnaire ?

Ce dernier point nous invite à analyser les deux autres conditions de stationnarité.

Nous dirons peu de choses sur la stabilité de la variance. Il n'est pas impossible que la qualité des statistiques s'améliorant avec le temps, les fluctuations aléatoires et partant la variance diminue au cours du temps; si ce phénomène est sensible, on peut substituer au processus initial x_t un processus y_t de variance stable et par ailleurs équivalent au premier :

$$y_t = \frac{x_t - m}{\sigma_t}.$$

Enfin, la dernière condition porte sur le corrélogramme, c'est-à-dire sur l'ensemble des coefficients de corrélation entre la valeur courante x_t et les différentes valeurs retardées x_{t-1}, x_{t-n}, ... de cette même chronique.

Ce corrélogramme traduit la nature des liens qui unissent la valeur présente aux valeurs passées de la chronique; il est donc très intimement lié

à la loi qui régit le phénomène étudié, et sa stabilité implique la stabilité de cette loi, son indépendance vis-à-vis des dates. Il ne faudra donc pas mélanger brutalement dans une même analyse des périodes pour lesquelles les enchaînements causaux ne sont peut-être pas les mêmes, par exemple dans une analyse globale, l'avant et l'après guerre, entre lesquels s'est réalisée une mutation des comportements, des conditions techniques et des institutions. Mais, en dehors de ce cas, caractérisé par un changement brutal et rapide, on pourra se trouver en présence de modifications continues des enchaînements logiques; si ces modifications sont suffisamment lentes, on pourra, en première approximation, supposer le processus stationnaire; si, par contre, elles s'effectuent à un rythme rapide, il faudra être très prudent dans l'interprétation des résultats fournis par les calculs de spectre.

L'examen des hypothèses que doivent satisfaire les processus stationnaires montre que ces hypothèses, sans être parfaitement réalisées, peuvent cependant être satisfaites dans bien des cas, au prix s'il le faut d'une transformation des données initiales, comme on l'a vu pour l'élimination du trend.

2 - REPRÉSENTATION GRAPHIQUE ET ESTIMATION DES SPECTRES

Portons sur un graphique, en abscisse la fréquence des différentes oscillations, en ordonnée leur amplitude dans le processus stationnaire en cause [1]. On obtient ainsi une courbe continue qui est la représentation graphique du spectre de la série. Donnons quelques exemples de spectres :

1° le spectre est constitué d'une droite horizontale; toutes les oscillations ont la même importance quelle que soit leur fréquence, aucune périodicité ou régularité ne se dégage; et la série est constituée par une suite d'aléas purs, indépendants entre eux (fig. 6-1);

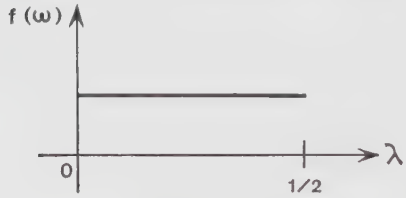

Fig. 6-1.

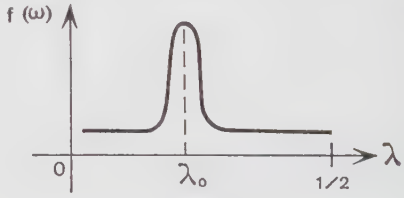

Fig. 6-2.

2° le spectre présente une bosse caractérisée pour une certaine fréquence λ_0 (fig. 6-2); alors l'oscillation relative à cette fréquence tient une grande

[1] En fait, ces amplitudes sont aléatoires, et de moyenne nulle. C'est en fait leur variance qui est portée, ou même plus exactement leur « densité de variance » si l'on peut dire, soit la fonction définie précédemment $f(\omega) = \frac{dF(\omega)}{d\omega}$.

place dans la série en cause, dont l'évolution temporelle présentera une certaine régularité, une « simili-période » de durée $T_0 = \frac{1}{\lambda_0}$. En particulier si cette bosse du spectre se produit pour la valeur particulière $\lambda_0 = 0$, la « simili-période » sera très grande, et, en pratique, la série sera affectée d'un trend.

On aura remarqué, sur les deux cas précédents, que le spectre s'arrête à la fréquence $\frac{1}{2}$; il ne s'agit pas là d'une circonstance particulière, mais d'un fait général, dont la démonstration est donnée en Annexe III, et qui peut être saisi en remarquant que les oscillations de forte fréquence, c'est-à-dire de faible période, se développent entièrement dans l'intervalle de deux observations et ne peuvent donc pas être perçues. On peut encore observer une oscillation dont la période est deux fois l'unité de temps $\left(T = 2, \lambda = \frac{1}{2}\right)$, mais une oscillation dont la période est égale à l'unité de temps ($T = 1$, $\lambda = 1$) sera indiscernable, comme le montre le graphique suivant (fig. 6-3).

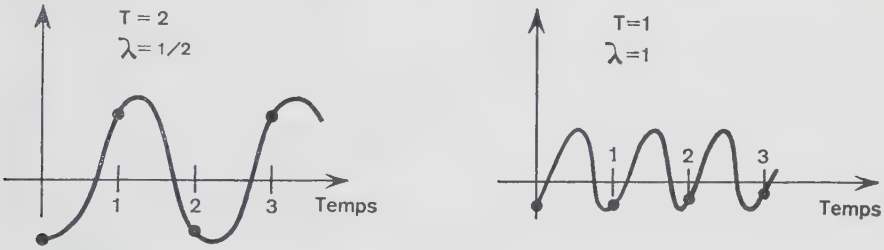

Fig. 6-3.

Enfin signalons que si une bosse du spectre à une fréquence donnée indique une régularité de période $T_0 = \frac{1}{\lambda_0}$ de la série temporelle, le contraire n'est pas entièrement exact : une régularité de période 1 an par exemple ne pourra pas en général être exprimée seulement par une sinusoïde de période 1 an, mais il faudra lui ajouter des sinusoïdes de période $\frac{1 \text{ an}}{2} = 6$ mois, $\frac{1 \text{ an}}{3} = 4$ mois, $\frac{1 \text{ an}}{4} = 3$ mois, $\frac{1 \text{ an}}{5} = \frac{12 \text{ mois}}{5}$ etc., et d'amplitudes adéquates [1]. Sur le spectre cela se traduira par des bosses, non seulement à la fréquence $\lambda_0 = \frac{1}{1 \text{ an}}$, mais aussi aux fréquences $2\ \lambda_0$,

[1] C'est l'équivalent de ce que l'on rencontre dans la décomposition en séries de Fourier des fonctions périodiques.

$3\lambda_0$, $4\lambda_0$, $5\lambda_0$ ... On verra plus loin, lors de l'étude des fluctuations cycliques, l'importance de ce phénomène.

Sur le plan statistique, le problème d'estimation du spectre est de déterminer la fonction f, qui est quelconque, à partir des observations de la série x_t, qui sont évidemment en nombre fini; on ne pourra donc pas calculer $f(\omega)$ pour chaque valeur de ω, on se contentera d'évaluer sa valeur moyenne sur des intervalles de fréquence (ω_1, ... ω_2) égaux; graphiquement, on portera le nombre trouvé au milieu de l'intervalle ω_1 ... ω_2 et on joindra les points correspondants par un trait rectiligne. Nous ne reproduisons pas ici les formules permettant les estimations correspondantes à partir des observations x_t; elles sont de différents types qui conduisent d'ailleurs souvent à des résultats sensiblement analogues.

Mentionnons qu'on a déterminé des intervalles de confiance de ces estimations, dans l'hypothèse où le processus de base est autorégressif. Quand il n'en est pas ainsi, on peut utiliser ces intervalles à titre au moins indicatif; mais, comme nous le verrons, les spectres des chroniques économiques sont tout à fait analogues à ceux que donneraient des schémas autorégressifs.

De toute évidence, le nombre de points du spectre que l'on pourra calculer avec une précision suffisante est proportionnel au nombre d'observations dont on dispose; le rapport moyen généralement admis étant à cet égard de 1 à 3 ou 1 à 5. En outre, il est reconnu que l'utilisation de l'analyse spectrale nécessite un minimum de points d'observations, généralement évalué à 100; enfin, signalons que la valeur moyenne de $f(\omega)$ que l'on calcule sur l'intervalle ω_1 ... ω_2 n'est pas pure, mais est contaminée par les valeurs que prend le spectre pour les fréquences voisines : si, pour la fréquence 1/10 par exemple, le spectre est très élevé, la valeur moyenne du spectre calculée sur l'intervalle 1/8 - 1/4 sera surestimée; il y a là une source d'erreur que l'on peut atténuer en faisant subir à la série initiale x_t une transformation linéaire adéquate : si cette transformation, de la forme :

$$y_t = \sum_{i=-k}^{i=k'} a_i \, x_{t+i}$$

est bien choisie, le spectre de y_t sera plus uniforme que celui de x_t et pourra être estimé avec une plus grande précision; et comme, connaissant les coefficients a_i, on sait passer du spectre estimé de y_t au spectre de x_t (cette opération s'appelle la « recoloration »), on aura ainsi facilement une meilleure estimation du spectre de x_t.

Il n'est pas sans intérêt d'illustrer ces propos par une expérience pratique, qui s'est appuyée sur une chronique engendrée artificiellement, au moyen d'une table de nombres au hasard :

$$x_t = 0{,}4 \, x_{t-1} + u_t$$

où u_t est un aléa gaussien pur; son spectre a été estimé à partir d'un échantillon de 200 points, par deux méthodes différentes, celle de Tukey-Hanning,

et celle de Parzen [1]. Le graphique joint, sur lequel est également figuré le spectre du processus, montre les résultats obtenus (fig. 6-4). On voit que

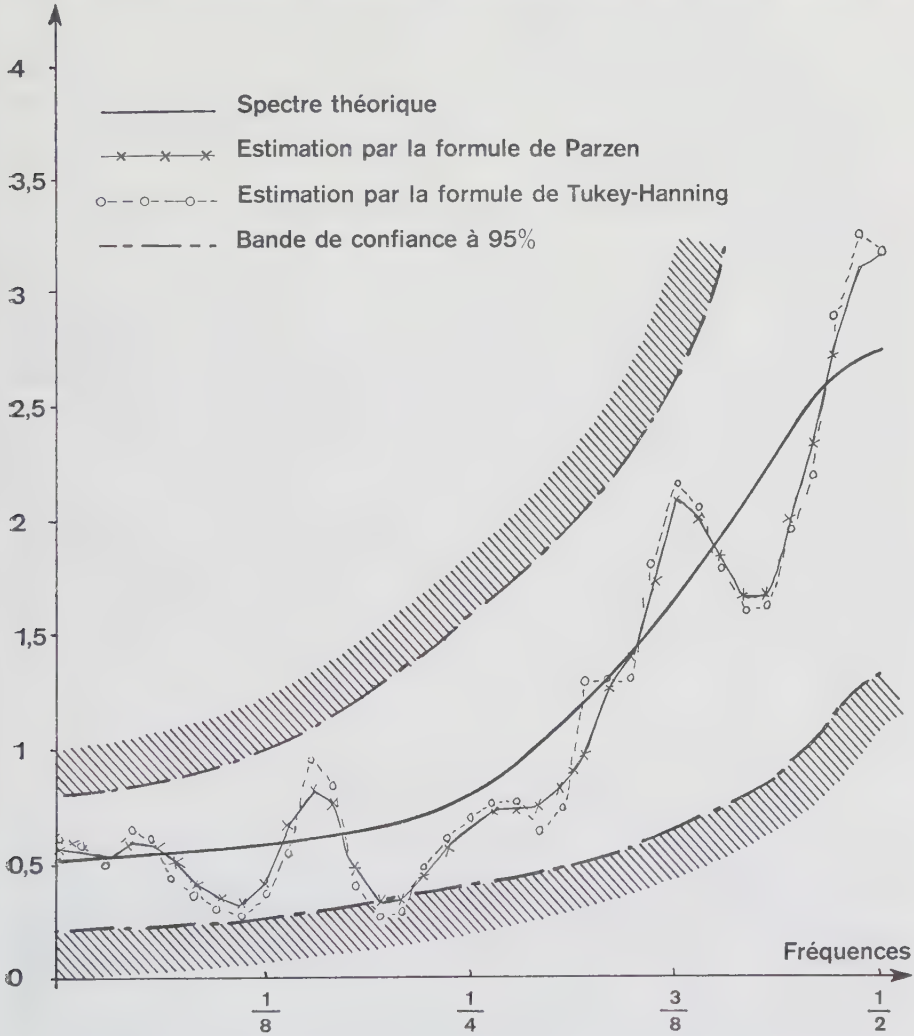

FIG. 6-4. — Spectre théorique et spectres estimés du processus $x_t = 0{,}4\, x_{t-1} + u_t$
— nombre d'observations : 200
— nombre de points d'estimation : 36

[1] Tous les calculs de spectre que nous avons effectués, l'ont été sur l'ordinateur Control Data 3600 de la Société d'Economie et Mathématique Appliquée. C'est ici l'occasion pour nous d'exprimer notre gratitude à cet organisme, et en particulier à MM. GOUX, BACHELET et BÉCHÉTOILLE pour les facilités matérielles qu'ils nous ont apportées, et l'abondante documentation qu'ils ont mis à notre disposition.

les deux estimations statistiques sont pratiquement confondues, mais qu'elles sont sensiblement différentes du spectre théorique; malgré le nombre élevé des observations, la précision obtenue est faible, et cependant l'intervalle de confiance à 95 % n'est jamais dépassé. Dans le cas présent, il ne s'est pas produit de contamination d'une bande de fréquence à la bande voisine, car le spectre est finalement assez plat. Il varie dans des proportions extrêmes de 1 à 15, alors que la contamination ne se produit que lorsque celles-ci sont de 1 à 100 environ.

Une remarque à propos de ce graphique : tout d'abord, la première bande de fréquence pour laquelle le spectre est calculé est la bande $0 - \frac{1}{72}$ qui correspond aux périodes supérieures à 72 unités de temps; ces oscillations comprennent en particulier le trend, de période infinie si l'on peut dire, et ne sont représentées, dans les 200 observations, qu'un nombre très faible de fois : environ 3 fois pour celle de période 72 et moins pour les autres. Cette première valeur est donc fort imprécise, et d'ailleurs peu intéressante puisqu'elle rassemble les caractéristiques d'oscillations fort diverses.

Des considérations tout à fait analogues à celles qui précèdent peuvent être faites sur l'estimation des spectres croisés de deux séries temporelles, qui comporte le décalage moyen pour chaque période et la corrélation entre les amplitudes des sinusoïdes de même période. L'exemple présenté ci-contre montre, l'un le déphasage et l'autre la cohérence, relatifs à des échantillons artificiels de 200 observations des processus :

$$z_t = u_t - 0{,}6\, u_{t-1}$$

et

$$x_t = -0{,}4\, x_{t-1} + u_t.$$

Le spectre croisé théorique de ces deux processus a été également porté sur un graphique (fig. 6-5) qui fait apparaître un bon accord entre quantités vraies et quantités estimées. On remarque que, comme pour le spectre simple, les estimations sont effectuées par points, ou plus exactement par bandes de fréquence. Enfin, les conditions pour l'estimation des spectres croisés sont les mêmes que celles relatives aux spectres simples : minimum d'environ 100 observations, et rapport d'au plus 1/3 entre le nombre de bandes de fréquence prises en compte et le nombre d'observations disponibles.

De tout ceci se dégagent les contraintes d'application de l'analyse spectrale et les caractères des résultats que l'on peut en tirer : elle nécessite des séries de grande longueur, plus de cent observations; en outre, les résultats obtenus ne sont pas d'une très grande précision, ce qui est normal : l'analyse spectrale se fonde sur des hypothèses très larges, elle s'applique à une classe étendue de phénomènes et il est naturel que ce qu'on en retire soit relativement flou; on retrouve là une caractéristique de la science

statistique : la précision des renseignements qu'elle fournit va de pair avec la spécificité des hypothèses introduites.

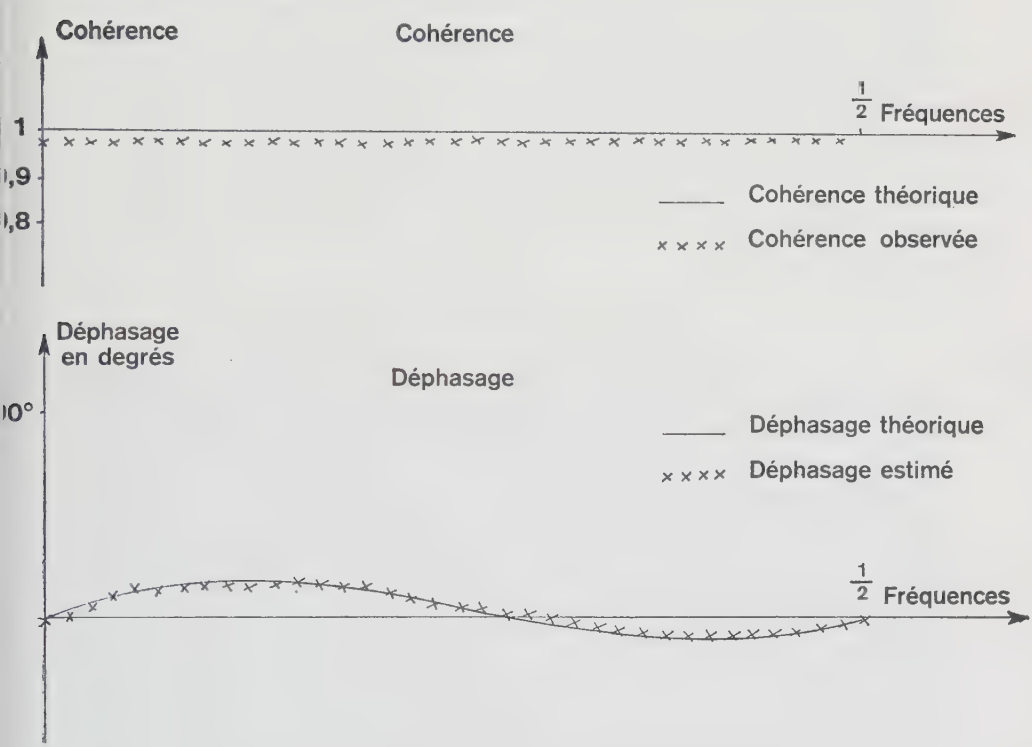

FIG. 6-5. — Spectre croisé des deux processus
$x_t = -0{,}4\, x_{t-1} + u_t$ et $z_t = u_t - 0{,}5\, u_{t-1}$

Nous sommes maintenant armés pour interpréter et juger quelques expériences d'application de l'analyse spectrale à l'économie, qui vont être présentées dans la section suivante.

3 - QUELQUES APPLICATIONS DE L'ANALYSE SPECTRALE AUX SÉRIES ÉCONOMIQUES

L'application de l'analyse spectrale à l'étude des chroniques économiques est assez récente; elle ne date que des années 60, et est presque uniquement le fait de chercheurs étrangers; il n'est donc pas sans intérêt de rassembler ici d'abord quelques-uns des résultats les plus frappants qui ont été mis en évidence.

L'analyse spectrale décomposant les mouvements économiques en oscillations de longueurs différentes, il est logique de classer les différentes études suivant la longueur des oscillations sur lesquelles elles se sont plus particulièrement penchées. C'est pourquoi on retiendra d'abord l'apport de l'analyse spectrale à l'étude des mouvements saisonniers; puis, on passera en revue ce qu'elle apprend sur les fluctuations conjoncturelles; ensuite, nous examinerons les applications de cette méthode à la recherche des cycles longs. Enfin, il sera présenté une étude sur les données françaises, visant à expliciter les ajustements que font les chefs d'entreprises entre stocks, production et commandes, dans une industrie particulière, celle de la fabrication de carton.

1) L'étude des procédures de désaisonnalisation.

Rapportons ici les recherches faites à ce sujet par Marc Nerlove [1]. Ces recherches avaient pour but de juger de la qualité des désaisonnalisations opérées sur les séries de l'emploi américaines; mais il est évident que la démarche suivie est très générale et pourrait s'appliquer à bien d'autres cas de désaisonnalisation.

Le but de toute procédure de désaisonnalisation est d'obtenir une série ne présentant plus de fluctuations annuelles et par ailleurs conforme sur tous les autres points à la série initiale. Or, il est assez facile de juger si la série désaisonnalisée ne présente plus de régularité annuelle : on peut par exemple confronter les 12 valeurs moyennes de la série désaisonnalisée pour les différents mois et de vérifier qu'elles ne sont pas significativement différentes. Mais c'est une toute autre chose de voir si la série désaisonnalisée représente bien par ailleurs la série brute, et est bien conforme à l'extra-saisonnier véritable; il n'existe pas, dans l'arsenal des méthodes traditionnelles, de critère, autre que celui fondé sur l'appréciation subjective, qui permette de répondre à cette deuxième question.

C'est là que se situe l'apport de l'analyse spectrale : la comparaison des spectres de la série brute et de la série désaisonnalisée, et l'examen de leur spectre croisé, permet de prendre une vision globale de l'ensemble des oscillations composant chaque série et de juger des déformations qui leur ont été apportées.

Portons donc d'abord notre attention sur le spectre de la série brute; le mouvement saisonnier, s'il était régulier, s'y traduirait par des pointes très élevées, infinies, aux fréquences qui composent les oscillations annuelles; ces fréquences sont, pour des données de base mensuelles :

$$\frac{1}{12} = \frac{1}{12} \qquad \text{Période } 12 = 1 \text{ an} \qquad (1 \text{ oscillation par an})$$

[1] M. Nerlove : Spectral analysis of seasonal adjustement procedures, *Econometrica* (1964).

$\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$	Période	6 mois	(2 oscillations par an)
$\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$	Période	4 mois	(3 oscillations par an)
$\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$	Période	3 mois	(4 oscillations par an)
$\frac{5}{12} = 0{,}417$	Période	$\frac{12}{5} = 2{,}41$ mois	(5 oscillations par an)
$\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$	Période	2 mois	(6 oscillations par an).

Mais en réalité, les mouvements saisonniers ne sont pas d'une régularité parfaite, et au lieu d'obtenir des pointes pour ces seules fréquences, on observera des bosses dans le spectre autour de ces fréquences-là; et de fait, les spectres expérimentaux établis à partir de séries brutes présentent bien ce type de conformation comme le montre le graphique page 100 (fig. 6-6), où l'on voit apparaître, après une pointe très élevée à la fréquence 0, qui est due à l'existence d'un trend sur la période d'observation, des bosses accusées aux fréquences mentionnées. La série à partir de laquelle les calculs ont été faits est assez longue, elle comporte environ 170 données correspondant à 14 années, et les intervalles de confiance qu'on peut établir montrent que les bosses aux fréquences saisonnières sont significatives : la série brute présente donc effectivement un mouvement saisonnier.

A quoi dont-on s'attendre pour la série désaisonnalisée, si la désaisonnalisation a été effectuée correctement ? Il semble normal de penser qu'aux fréquences différentes des fréquences annuelles, le spectre doit être le même que celui de la série brute puisque cette dernière ne doit différer de la série désaisonnalisée que par le mouvement saisonnier. Quant aux fréquences saisonnières, la logique paraît être que pour elles le spectre se prolonge par continuité, sans bosses ni creux; une désaisonnalisation correcte conduirait alors au spectre défini en traits pointillés sur le graphique ci-joint, identique à celui de la série brute sauf aux fréquences saisonnières qui seraient en quelque sorte rabotées.

Cette hypothèse présente un certain caractère d'à priori; on peut toutefois, à la suite de M. Nerlove, la justifier par la considération suivante : les extra-saisonniers des processus économiques peuvent souvent être considérés comme équivalents à la somme de trois composantes, un trend traduisant la tendance à long terme, un processus autorégressif rendant compte des mouvements à moyen terme, et un résidu aléatoire pur. Or, ce type de mouvement conduit précisément à un spectre décroissant régulièrement depuis la fréquence 0.

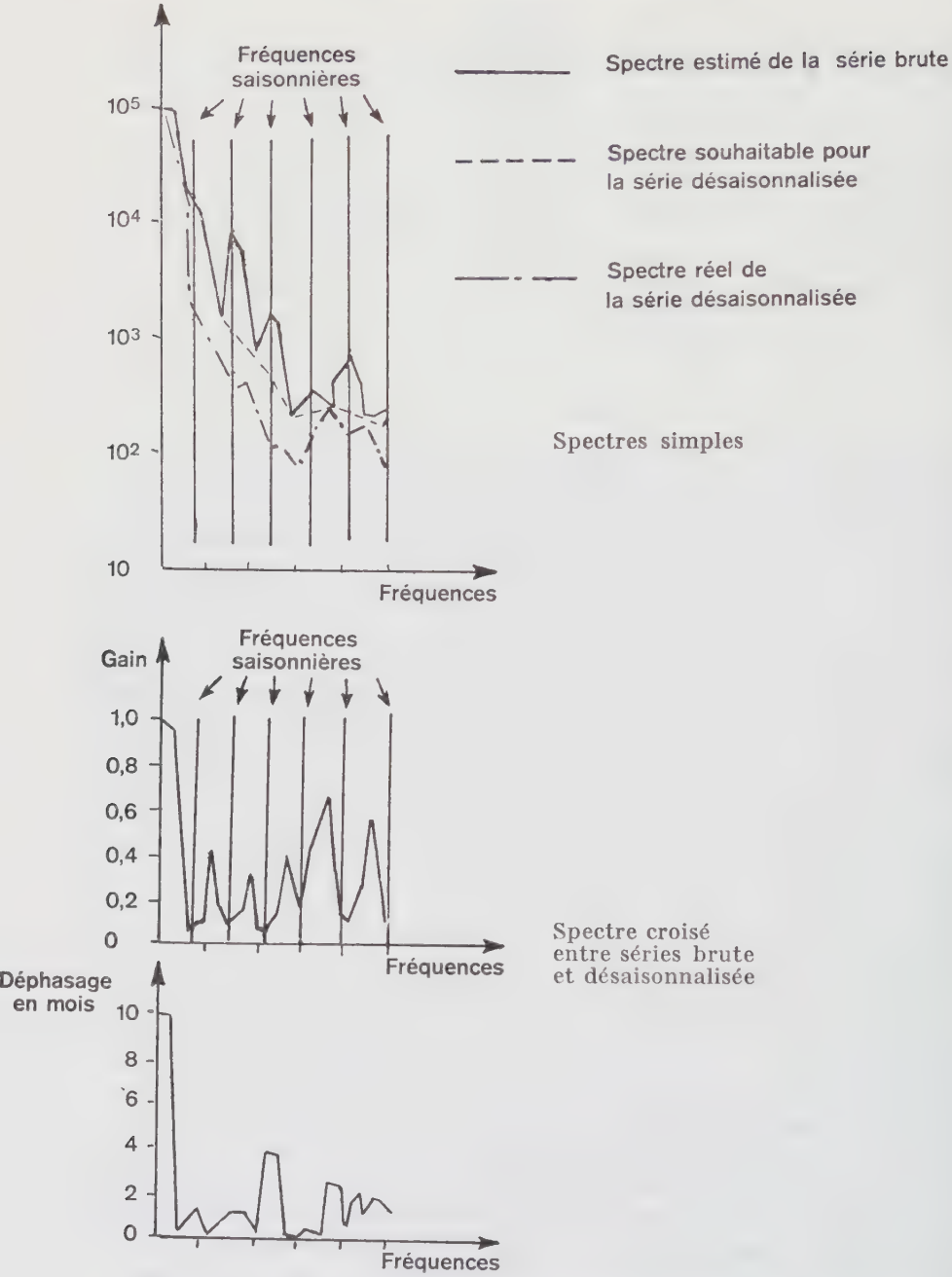

FIG. 6-6. — Analyse spectrale de la série du chômage aux U.S.A.
Source : M. NERLOVE, *op. cit.*

Si l'on calcule maintenant le spectre de la série désaisonnalisée et qu'on le compare au spectre idéal qui vient d'être défini, on voit qu'on est loin du compte, comme le montre la figure 6-6; la désaisonnalisation n'a pas pour seul effet de raboter les « bosses » du spectre de la série brute, mais les autres fréquences sont également touchées, et leur importance est sensiblement diminuée, sauf les très basses fréquences, correspondant au trend, qui restent à peu près inchangées : la série corrigée est plus lisse et toutes ses fluctuations sont atténuées; en termes économiques, les mouvements conjonctuels sont affaiblis. Mais, de plus, le spectre de la série désaisonnalisée présente des creux aux fréquences saisonnières; cela indique que la désaisonnalisation a été en quelque sorte trop forte : si les fluctuations annuelles ne doivent pas être plus importantes que les autres dans l'extrasonnier, il n'y a pas de raisons non plus pour qu'elles soient plus faibles.

Ainsi, la comparaison des spectres montre que la désaisonnalisation altère l'ensemble de la série et ne touche pas simplement les fluctuations saisonnières. On peut préciser cette conclusion par la considération de spectre croisé entre série brute et série désaisonnalisée. Bien que la loi qui fait passer de l'une à l'autre ne soit pas tout à fait stable dans le temps, en ce sens que les coefficients saisonniers d'un même mois varient légèrement d'une année à l'autre, cette loi se modifie quand même lentement et le spectre croisé en fournira une estimation moyenne qui ne sera pas sans enseignements. Le spectre croisé permettra de mettre en évidence, pour chaque fréquence :

— le décalage entre l'oscillation de la série brute et l'oscillation correspondante de la série désaisonnalisée : ce décalage devrait être nul aux fréquences non saisonnières.

— le rapport entre les amplitudes de la série brute et de la série désaisonnalisée; ce rapport, appelé gain, devrait être égal à 1 pour les fréquences non saisonnières, et inférieur à l'unité pour les fréquences saisonnières, puisque celles-ci sont affaiblies par la désaisonnalisation.

Les graphiques (fig. 6-6) montrent que ceci n'est pas réalisé :

— Le gain est toujours inférieur à 1 sauf pour les très basses fréquences. On retrouve ce résultat que toutes les fréquences sont atténuées et pas seulement les fréquences saisonnières.

— Les décalages sont importants, surtout pour les fréquences élevées, ils correspondent à des périodes de 2 ou 3 mois : les oscillations correspondantes de la série désaisonnalisée sont retardées d'autant; les conséquences de ce fait sont importantes, tant du point de vue théorique que du point de vue pratique : sur le plan théorique, une étude faite à partir de séries désaisonnalisées pourrait mettre en évidence de faux décalages entre phénomènes, dus uniquement aux effets des méthodes de désaisonnalisation; sur le plan pratique, l'analyse conjoncturelle s'en trouve handicapée, puisqu'elle risque de ne percevoir les changements qu'avec un certain retard.

L'apport de l'analyse spectrale à l'étude des procédures de désaisonnalisation est donc très important. On a une mesure de l'intensité du mouvement saisonnier par l'analyse des bosses que présente le spectre de la série brute. On peut définir une certaine norme pour la série désaisonnalisée, qui doit garder intacte les fréquences non saisonnières et atténuer convenablement celles qui le sont; et on a, par là-même, un moyen de juger la qualité des résultats que donne la désaisonnalisation. Il reste bien sûr des points délicats; en particulier, comme les mouvements saisonniers ne sont pas stables mais se modifient en général légèrement dans le temps, les séries brutes ne sont pas, de ce fait, rigoureusement stationnaires puisque la loi qui les engendre change; et les spectres croisés ne sont alors qu'une première approximation; il faudrait, pour mieux cerner la réalité, des méthodes plus fines (1).

2) L'analyse spectrale et les mouvements conjonctuels.

Deux études méritent ici d'être mentionnées : la première, effectuée par M. Hatanaka (2) porte sur les indicateurs de conjoncture américains utilisés par le NBER. La seconde, de Mitsuo Suzuki (3) analyse au moyen des méthodes spectrales les traits fondamentaux de l'économie japonaise depuis un siècle.

a) L'analyse spectrale des indicateurs de conjoncture américains. On sait que ces indicateurs, fort nombreux, ont été classés par le National Bureau en trois groupes, selon qu'ils sont en avance, en retard, ou qu'ils coïncident avec la conjoncture générale. Mais ce classement a été effectué uniquement à partir des positions relatives des points de retournements à la hausse ou à la baisse des différentes séries, ce qui prête le flanc à critique : en effet, il n'est pas sûr que les décalages constatés à ces moments-là se maintiennent lors des autres phases de conjoncture, dont la considération est loin d'être sans intérêt, car il n'est pas indifférent pour la politique que la production croisse à un rythme plus faible qu'antérieurement, et un tel fait, en plus de sa valeur propre, peut également être annonciateur d'un retournement; en outre, savoir que par exemple les mouvements d'effectifs précèdent ceux de la production en tous les points de temps, et non pas seulement lors des retournements, apporterait une contribution certaine à la connaissance économique. Un des buts de l'étude citée était donc de vérifier que les antécédences rencontrées lors des retournements se vérifiaient également en dehors des points de retournement : ce type de recherche est possible

(1) Qui pourraient fort bien trouver leurs origines dans certains prolongements de l'analyse spectrale, comme par exemple la démodulation complexe.

(2) C. Granger et M. Hatanaka : Spectral analysis of economic time séries (1964).

(3) M. Suzuki : A spectral analysis of japanese economic time series since the 1880's, *Kyklos* (1965).

grâce à l'analyse spectrale : on détermine le spectre croisé des deux séries à confronter et on regarde si les différents décalages sont similaires pour chacune des fréquences de la bande qui correspond aux mouvements cycliques. Quelques mots sur les données statistiques utilisées : une trentaine de séries ont été choisies parmi celles qu'utilise le NBER; elles s'étendent sur 42 ans, de 1919 à 1961. Comme la longueur des mouvements cycliques américains varie de 1 à 8 ans, cela permet d'avoir au moins 5 oscillations du type le plus long, soit une bonne représentation de la bande de fréquence qui nous intéresse ici. Ce sont les séries brutes et non les séries désaisonnalisées qui ont été analysées, car, comme on l'a vu, les opérations de désaisonnalisations couramment pratiquées ont des conséquences complexes : elles n'ont pas pour seul effet d'ôter le mouvement saisonnier, mais elles affectent également le reste de la série, en particulier en la décalant dans le temps. Pour certaines fréquences, dans le but d'éviter la contamination que les pointes élevées du spectre aux fréquences annuelles et aussi à la fréquence zéro auraient pu introduire, il a fallu filtrer la série, au moyen d'un filtre linéaire adapté à chaque série, et « recolorer » ensuite le spectre de la série filtrée. Parmi les nombreux résultats obtenus, deux, semble-t-il méritent un développement tout particulier : le premier est relatif au spectre simple de l'indice de la production industrielle; celui-ci, reproduit ci-contre (fig. 6-7), présente une décroissance dont la régularité n'est mise en cause qu'aux fréquences 1/48, 1/24, 1/16, 1/12, qui correspondent aux oscillations de période 4 ans et à ses harmoniques 2 ans (soit 4/3), 1,33 (soit 4/3) et 1 an. On observe également une petite bosse du spectre à la fréquence 1/96 qui conduit à une période de 8 ans. Il semble donc que 5 oscillations soient partilièrement marquées : celles dont les périodes sont 8 ans, 4 ans, 2 ans, 1,33 an et 1 an.

Fig. 6-7. — Spectre de l'indice de production des U.S.A.

Source : Granger et Hatanaka, *op. cit.*

Or, l'analyse économique, ainsi que l'observation de ce qui se passe dans d'autres pays reconnaît l'existence des cycles de 8 ans dus aux investissements; mais ces cycles sont considérés aux U.S.A. comme relativement moins importants que ceux des stocks d'une période de 4 ans, et de fait, le spectre présenté semble corroborer cela dans la mesure où la bosse est plus petite pour la période de 8 ans que pour celle de 4 ans.

Le cycle de deux ans avait déjà été mis en évidence par d'autres procédés et s'était vu conférer une individualité propre par deux auteurs : R. Mack et Zarnovitch; mais l'analyse spectrale qui laisse apparaître une excroissance du spectre pour les oscillations de période 2 ans nous fait entrevoir aussi que ce cycle n'est peut-être qu'un sous-produit, un harmonique du cycle fondamental de 4 ans, ce qui jette un doute sur son individualité propre.

En tout cas, l'oscillation de période 1,33 ans n'a jamais reçu d'attention et n'apparaît ici très probablement que comme harmonique du cycle de 4 ans.

Enfin, l'oscillation de période 1 an traduit les fluctuations saisonnières habituelles.

Portons maintenant l'attention sur le spectre croisé de deux indicateurs jugés concomittants par le NBER : l'indice de la production industrielle et celui de l'emploi dans l'industrie (fig. 6-8). Pour interpréter le graphique donnant la cohérence en fonction des fréquences, il faut se rappeler que la cohérence est en quelque sorte le carré du coefficient de corrélation qui lie les deux amplitudes des oscillations en question dans chacun des deux processus. On voit que cette cohérence est très fluctuante; elle vaut en moyenne 0,7 pour les fréquences des cycles économiques comprises entre 1/96 et 1/12, soit dans l'intervalle de période 1 - 8 ans; la corrélation correspondante tourne autour de 0,85, elle est donc assez forte, ce qui est normal en raison des liens techniques entre la production et l'emploi; les décalages sont faibles, ce qui satisfait notre intuition et est conforme au classement du National Bureau, selon lequel les deux indicateurs sont concomitants; mais ils correspondent à un retard de l'emploi sur la production, à peu près constant, et égal à un mois et demi environ. Ce retard de l'emploi sur la production peut paraître étrange; on s'attendrait plutôt à une avance, l'auteur émet, pour expliquer ceci, une hypothèse à laquelle nous souscrivons entièrement : ce qui précède nécessairement la production c'est l'activité de la main d'œuvre, produit de l'emploi par la durée du travail, et non l'emploi lui-même. Or, à une variation de la production, la première adaptation se fait d'abord par la durée du travail, et l'adaptation par l'emploi n'intervient qu'avec un certain retard, que les résultats de l'analyse précédente conduisent précisément à fixer à un mois et demi.

Les exemples qui viennent d'être cités sont satisfaisants, mais hâtons-nous de dire que les différents indicateurs étudiés ne se montrent pas tous

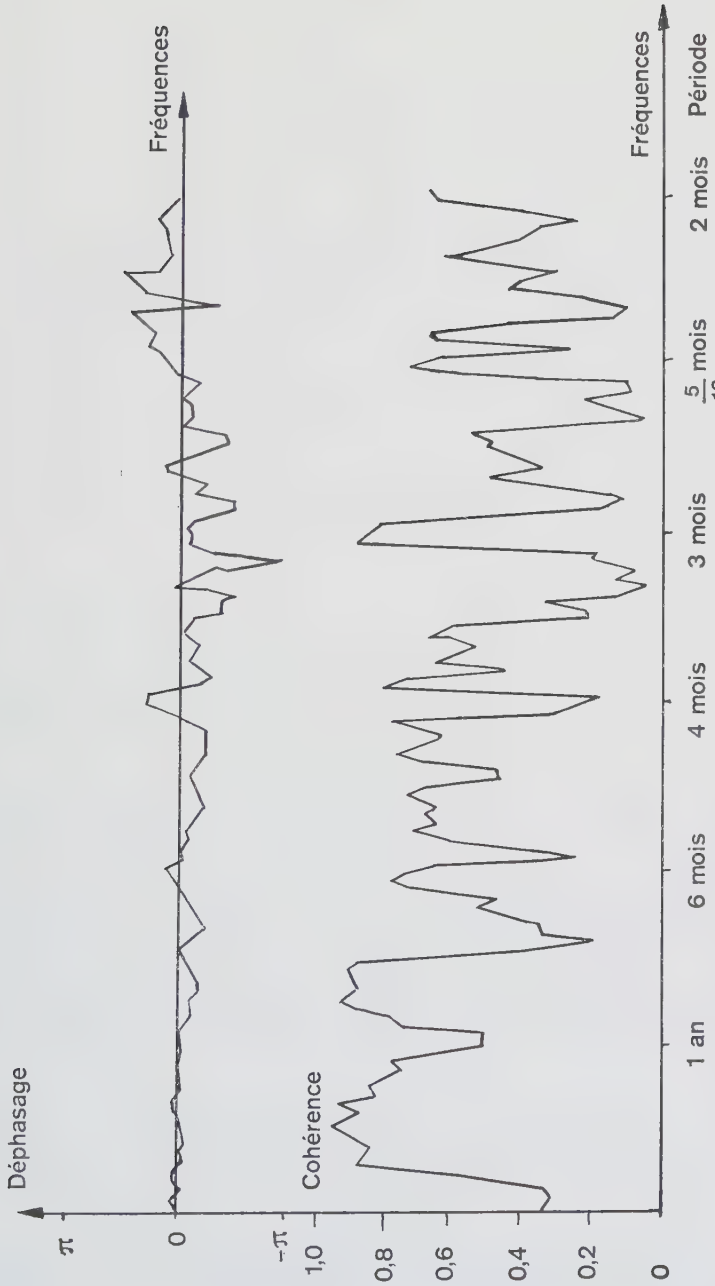

FIG. 6-8. — Spectre croisé de l'indice de production et de l'indice de l'emploi aux U.S.A.
Source : GRANGER et HATANAKA, *op. cit.*

d'aussi bonne composition; leurs spectres présentent rarement aux fréquences cycliques des pointes aussi nettes que celle de l'indice de la production industrielle; et pour les spectres croisés, les déphasages qui apparaissent fluctuent sensiblement d'une fréquence à l'autre; cependant, ils ont même sens que les retards et avances déterminés par le N.B.E.R. et en gros les mêmes valeurs moyennes : les relations d'ordre que le National Bureau avait mis en évidence en ne considérant que les points de retournements, sont donc valables à tout instant; toutefois, les liens entre oscillations du mouvement économique général et oscillations de chaque série indicatrice restent peu élevés. Ceci montre bien que le problème de la prévision à court terme reste posé : aucun des indicateurs étudiés n'est parfait, et ceci justifie le recours à un grand nombre de séries pour pouvoir faire le plus de recoupements possibles. Il serait à cet égard fort intéressant d'étudier par le même procédé les indices de diffusion, qui concrétisent en quelque sorte ces recoupements : ces indices représentent le pourcentage des séries en hausse parmi un ensemble donné de séries; ils correspondent bien à l'idée de généralité du mouvement économique d'ensemble et à celle de recoupement : si un grand nombre de séries montent, il y a peu de chances que ce soit uniquement par hasard et il est probable que l'activité économique est elle-même en hausse.

Les lacunes de cette étude tiennent à l'hypothèse de permanence des liens entre séries. Cette permanence peut être mise en doute, surtout si l'on songe que la période d'étude s'étend de 1919 à 1961 et a été traversée par la crise de 1929 et la 2e guerre mondiale; est-ce qu'à ces deux époques d'importants changements de structure ne sont pas intervenus pour bouleverser les lois de la conjoncture et modifier les liens qu'il pouvait y avoir entre les différents indicateurs ? Ceci pose évidemment tout le problème de l'analyse du présent à partir des enseignements du passé, mais ce problème semble particulièrement grave quand l'analyse spectrale est en jeu. En effet, quand on détermine des retards moyens entre séries par simple observation des points de retournements, il est relativement aisé de voir si ces retards évoluent au cours du temps, où s'ils sont à peu près stables; par contre, le déphasage que nous fournit le spectre croisé est un chiffre unique, sorte de moyenne entre différents déphasages à chaque instant, sur l'évolution desquels on n'a aucun renseignement par le spectre croisé (1).

b) L'évolution de l'économie japonaise depuis la fin du XIXe siècle. Il s'agit là de recherches effectuées par Mitsuo Suzuki à partir des nombreuses statistiques globales annuelles du Japon. Trente-trois de ces séries ont été retenues sur la période de 1884-1961; exprimées à la fois en prix constants

(1) Une méthode assez délicate permet toutefois d'estimer pour une fréquence donnée l'évolution du déphasage entre deux séries au cours du temps; c'est la démodulation complexe et il serait certainement intéressant de l'appliquer ici pour nuancer les résultats bruts de l'étude qui vient d'être écrite.

et en prix courants pour les séries de valeur, elles recouvrent l'ensemble des grandeurs économiques importantes sur :

— La production,

— Le budget de l'Etat,

— La consommation, l'investissement, le commerce extérieur,

— La population totale, la population active et la population employée par secteurs d'activités,

— Les données monétaires : prix, masses monétaires, dépôts bancaires, prêts à l'économie, et taux d'intérêts.

Deux éléments viennent limiter la valeur des résultats obtenus : d'abord le nombre relativement bas, 80 environ, des observations disponibles sur chaque série; ensuite, les changements structurels importants qui ont affecté l'économie tout au long de la période d'étude : il est difficile par conséquent de penser que ces chroniques sont issues d'un processus stationnaire stable et l'analyse spectrale ne fournira que des estimations moyennes de l'intensité des différentes composantes sinusoïdales et des décalages entre séries; elle ne peut donc constituer qu'une première approximation.

Ces réserves faites, il convient d'insister sur la richesse des résultats obtenus; nous n'en retiendrons, à titre d'illustration, que trois :

D'abord l'examen comparatif des spectres simples des différentes séries fait apparaître que ceux-ci présentent pour la plupart des bosses caractéristiques à des fréquences qui correspondent aux cycles des investissements de 6-8 ans, dont l'existence se trouve ainsi confirmée.

Ensuite, l'auteur a développé une méthode originale de construction des cycles de références. On sait que ceux-ci ont été élaborés par Burns et Michtell de la manière suivante : après élimination de la tendance de longue période, on calcule à chaque instant la différence entre le pourcentage de séries qui augmentent et celui des séries qui baissent; ce solde a une évolution qui résume celles de toutes les séries composantes et fournit une base de référence pour l'étude de l'évolution de chaque série particulière. L'inconvénient de ce procédé est que toutes les oscillations de chaque série composante, et non pas seulement les oscillations cycliques, sont prises en compte dans le solde : la série obtenue n'est pas pure, elle intègre aussi bien les fluctuations de période 8 ans que celles de période 4 ans ou 2 ans. Si l'on s'intéresse aux fluctuations dues aux investissements, il serait intéressant d'isoler dans chaque série la part de l'évolution de la série qui leur revient et de calculer les soldes précédents, non pas à partir des séries globales, mais de ses résidus. Or, ceci est rendu possible par les méthodes de l'analyse spectrale : de même que celle-ci permet de mesurer par le spectre simple l'importance de telle bande de fréquence, elle rend possible une estimation de ce que serait l'évolution de la série si seule cette bande de fréquence existait; cette opération, dont

le détail mathématique est présenté en Annexe, a été effectuée par M. Suzuki sur l'ensemble des séries étudiées et l'auteur en a tiré une évolution de référence pour les fluctuations de période de 6 à 8 ans; il remarque que cette évolution concorde bien avec les enseignements de l'histoire; mais il serait évidemment intéressant de confronter cette série avec celle qu'aurait fournie la méthode originelle du National Bureau, et on peut regretter que cette confrontation ne soit pas présentée.

Toutefois, les résultats les plus intéressants, semble-t-il, sont ceux que l'on tire des spectres croisés; ces derniers, déterminés pour tous les couples de séries analysées, mettent en évidence les décalages entre les oscillations de même fréquence des différentes séries. On peut ainsi dresser pour chaque fréquence un tableau résumant ces relations de décalages. On reproduit ici le tableau relatif à la fréquence 1/8, soit une période de 8 ans, mais l'auteur indique que les décalages sont assez analogues aux autres fréquences et en particulier aux fréquences faibles, correspondant aux mouvements à long terme.

	Retards en année
— Dépenses gouvernementales	0,0
— Prêts bancaires	
— Exportations	0,5
— Dépôts bancaires	1,0
— Produits industriels	1,5
— Produits des services	
— Prix à l'exportation	
— L'investissement	
— Importations	
— Monnaie bancaire	
— Prix des produits importés	
— Revenu national	2,0
— Masse monétaire	
— Consommation privée	2,5
— Billets	
— Indices des prix	
— Produits des industries primaires	
— Prêts de la banque du Japon	3,0

Il est possible à partir de là, d'essayer d'expliquer le fonctionnement de l'économie japonaise vis-à-vis des fluctuations cycliques et des oscillations plus longues : les facteurs clés des mouvements sont au nombre de trois :

les dépenses gouvernementales, les prêts bancaires et les exportations; leur expansion est suivie, avec un décalage d'un an environ, par l'accroissement des dépôts bancaires, et 6 mois plus tard par l'augmentation du produit des activités secondaires (industrie) et tertiaires (services), ainsi que par l'augmentation des investissements et des importations; en même temps, la monnaie de banque s'accroît et, conséquence tardive de la hausse des exportations, les prix des produits exportés montent; quelques mois après, le revenu national net se met à croître, en même temps d'ailleurs que les prix des produits importés et la masse monétaire; ensuite, c'est la consommation privée qui est entraînée, et avec elle la monnaie fiduciaire, les prix et le produit des activités primaires; enfin, avec un retard de près de trois ans, c'est-à-dire au moment où les trois facteurs initiaux plafonnent, les prêts de la Banque du Japon commencent seulement à monter.

Cette analyse reste pour une bonne part descriptive, les causalités qu'elle implique sont complexes et sujettes à controverses; elles font certainement appel à de nombreux feed-backs : c'est ainsi que, par exemple, la hausse des prix des produits exportés qui, quand elle débute, est une conséquence de l'augmentation des exportations, contribue sans nul doute ensuite au plafonnement puis à la baisse de ces exportations. Mais il n'en reste pas moins que cette description est particulièrement suggestive et riche d'enseignements à la fois théoriques et pratiques.

3) L'étude des fluctuations longues.

Les fluctuations longues ont fait couler beaucoup d'encre; on connaît les controverses qui ont tourné autour du cycle de Kondratieff. Ses causes sont discutées : monnaie, évènements exogènes tels que guerres ou innovations; sa régularité et par là même son existence réelle sont mises en question. Ce cycle dont la période est d'environ 50 ans ne peut être étudié par l'analyse spectrale; en effet, il faudrait posséder des séries homogènes sur une étendue de temps couvrant au moins 5 à 6 périodes, c'est-à-dire 250 à 300 ans.

Mais un cycle d'une périodicité plus faible a été proposé, c'est le cycle de 20 ans environ, qu'on rencontrerait dans certains pays industriels et qu'on associe volontiers au rythme de la construction immobilière.

Ce cycle a été étudié par les méthodes de l'analyse spectrale par Mitsuo Suzuki (1) pour l'économie japonaise et par Mrs. Adelman (2) dans le cas des U.S.A. Ces deux auteurs opèrent sur des séries de faible longueur : Mrs Adelmann utilise des chroniques portant sur 75 ans, quant à Mitsuo Suzuki, son analyse des cycles longs a été menée en même temps que l'étude des cycles Juglar qui vient d'être présentée : elle est réalisée à partir de

(1) M. Suzuki, *op. cit.*

(2) I. Adelmann : Long cycles : fact or artifact, *American Economic Review* (1965).

80 années d'observation. Ceci est un peu insuffisant puisqu'on n'aura ainsi que 4 oscillations de période 20 ans et moins encore pour les périodes plus longues. Les deux auteurs y suppléent par le grand nombre des séries étudiées : 45 pour les U.S.A. et 33 pour le Japon. Si un trait relatif aux oscillations qui nous intéressent se retrouve sur chaque spectre, ou tout au moins sur un grand nombre d'entre eux, on aura de bonnes raisons de penser qu'il ne correspond pas à des particularités d'échantillonnage, mais à une caractéristique réelle de l'économie dont, par essence, les fluctuations se font sentir de manière similaire sur toutes les grandeurs caractéristiques de l'activité.

Exposons successivement les résultats obtenus pour chacun des deux auteurs. Ce ne sont pas les données brutes x_t que M. Suzuki analyse, mais leurs variations relatives d'une année sur l'autre :

$$\frac{x_t - x_{t-1}}{x_{t-1}}.$$

Il observe que les spectres de ces variations relatives présentent une bosse aux fréquences voisines de 1/10 (fig. 6-9) mais il remarque que les

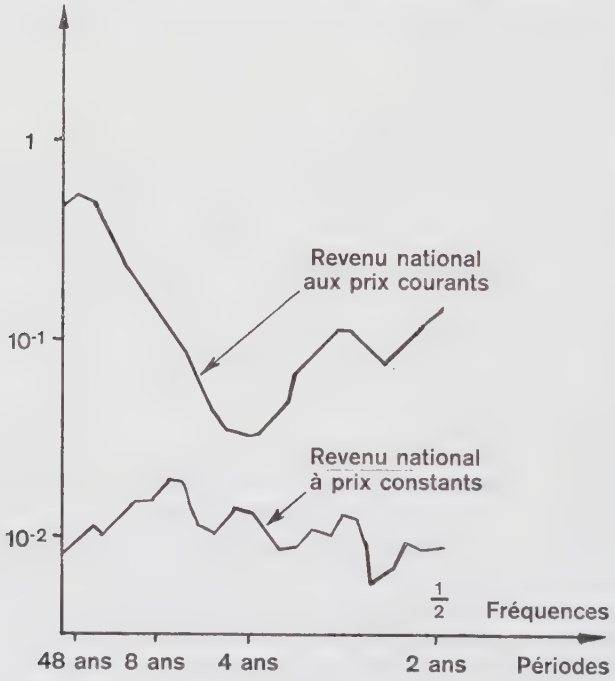

FIG. 6-9. — Spectres des accroissements relatifs d'une année sur l'autre du revenu national japonais.
Source : M. SUZUKI, *op. cit.*

variations relatives s'apparentent fort aux différences premières $x_t - x_{t-1}$, dont l'effet est précisément de créer un trou dans le spectre pour les fréquences nulles lorsque la série de base présente un trend.

Il en déduit donc très sagement que son étude ne permet pas de conclure à la spécificité d'un cycle de 20 ans sur les données de base y_t; mais, comme, dit-il, les taux de changement des données de base ont un certain sens pour l'analyse économique, le fait que ces taux de changement présentent de longues oscillations n'est pas en soit sans intérêt.

Mrs Adelmann a opéré, elle, sur les données brutes; les spectres qu'elle obtient sont analogues d'une série à l'autre; ils présentent une décroissance régulière, interrompue de manière plus ou moins nette aux fréquences correspondant au cycle de 4 ans. On retrouve donc le cycle des stocks qui semble effectivement caractériser l'économie américaine, mais pas de bosse du spectre aux fréquences inférieures et en particulier aux fréquences correspondant au cycle de 20 ans.

Du recoupement de ces deux résultats, il semble donc que les fluctuations de période 20 ans n'apparaissent pas sur les séries de base mais sur les séries des taux de changement; il est alors nécessaire de choisir entre ces deux représentations; notre préférence personnelle irait alors à la série des taux de changement et ce pour deux raisons.

La première est d'ordre statistique; il semble peu réaliste d'assimiler les chroniques économiques portant sur de longues périodes à des processus stationnaires, en raison de l'importance que prend alors le trend; les chroniques des taux de changement sont de ce point de vue beaucoup plus satisfaisante. La deuxième est d'ordre économique; la caractéristique intéressante d'un mouvement, ce n'est pas sa valeur absolue, mais sa valeur relative : ainsi, une variation de production de 10 unités représente quelque chose de très différent suivant qu'elle est rapportée à 5 unités, auquel cas elle sera jugée très importante ou à 1 000 unités, et alors elle sera négligeable. la prise en compte des pourcentages de variation rétablit cette juste mesure : D'un autre point de vue, on peut dire que les phénomènes économiques sont le plus souvent de l'ordre multiplicatif et non pas de l'ordre additif.

4) L'analyse spectrale et l'étude des réactions à court terme des chefs d'entreprise.

Les différents travaux présentés jusqu'ici avaient trait à l'économie globale; l'apport descriptif, visuel en quelque sorte, de l'analyse spectrale était évident; mais son pouvoir explicatif restait limité en raison de la complexité des enchaînements logiques et de la présence de nombreux feed-backs, chacune des variables pouvant être à la fois cause et effet de l'autre. Il est donc apparu intéressant d'appliquer l'analyse spectrale à un problème de type microéconomique, dans lequel un agent, confronté à une variable exogène sur laquelle il n'a aucune action, est conduit à prendre un certain

nombre de décisions touchant d'autres variables dont il a la disposition. Nous avons choisi pour cela l'analyse des adaptations à court terme des chefs d'entreprise à la demande qui leur est adressée.

L'hypothèse implicite selon laquelle les commandes enregistrées constituent à court terme un élément exogène indépendant de la volonté des entrepreneurs mérite toutefois quelques justifications. Elle suppose en effet un choix entre une attitude « classique » pour laquelle les commandes et la production se déterminent conjointement par confrontation de l'offre et de la demande et modification du prix, et une attitude « Keynésienne » d'après laquelle, les prix ne changeant guère, la demande est considérée comme une donnée a priori issue des désirs des consommateurs, sur laquelle s'adapte la production; et le choix a été effectué en faveur de la 2e hypothèse, car elle semble en effet mieux correspondre aux réactions à court terme que la théorie classique, qui vise plutôt à décrire un équilibre à long terme; enfin, elle concorde mieux avec les observations des praticiens de l'économie, qu'il s'agisse des conjoncturistes qui analysent le comportement à court terme des entrepreneurs, ou des entrepreneurs eux-mêmes.

Les entrepreneurs peuvent répondre aux variations de la demande par modification des stocks ou de la production, et c'est le champ et les modalités de cette adaptation qui seront ici étudiés sur une branche d'industrie particulière. Les branches pour lesquelles on dispose de séries suffisamment longues sur les stocks, la production et la demande sont rares en France. Parmi les deux ou trois qu'on pouvait envisager, c'est la branche de la fabrication de carton qui a été retenue. On y dispose en effet, depuis 1945, d'observations mensuelles ininterrompues sur la production, les commandes enregistrées dans le mois, le carnet de commande en fin de mois et les stocks en fin de mois.

Toutefois, l'examen graphique (fig. 6.10, 11, 12 et 13) de ces séries temporelles montre qu'elles ont eu un comportement très particulier au cours des années 1946 et 1947 : on était alors en période de reconstruction et une tendance anormale à l'augmentation se manifeste. On a donc ôté ces années là, dont la prise en considération aurait pu perturber les conclusions, et la période d'étude retenue a été finalement janvier 1948 - juin 1965.

La production et les commandes enregistrées présentent des mouvements similaires et sont fortement saisonnières; les stocks en fin de mois et les carnets de commandes en fin de mois semblent moins saisonniers; enfin, les 4 séries présentent, à des degrés divers, des trends.

L'importance des stocks est relativement faible : ils correspondent à une ou deux semaines de production environ; et les carnets de commandes couvrent une période de production de l'ordre du mois. Le carton est donc une industrie où les opérations se dénouent rapidement et où les phénomènes d'adaptation à court terme devraient être particulièrement accusés.

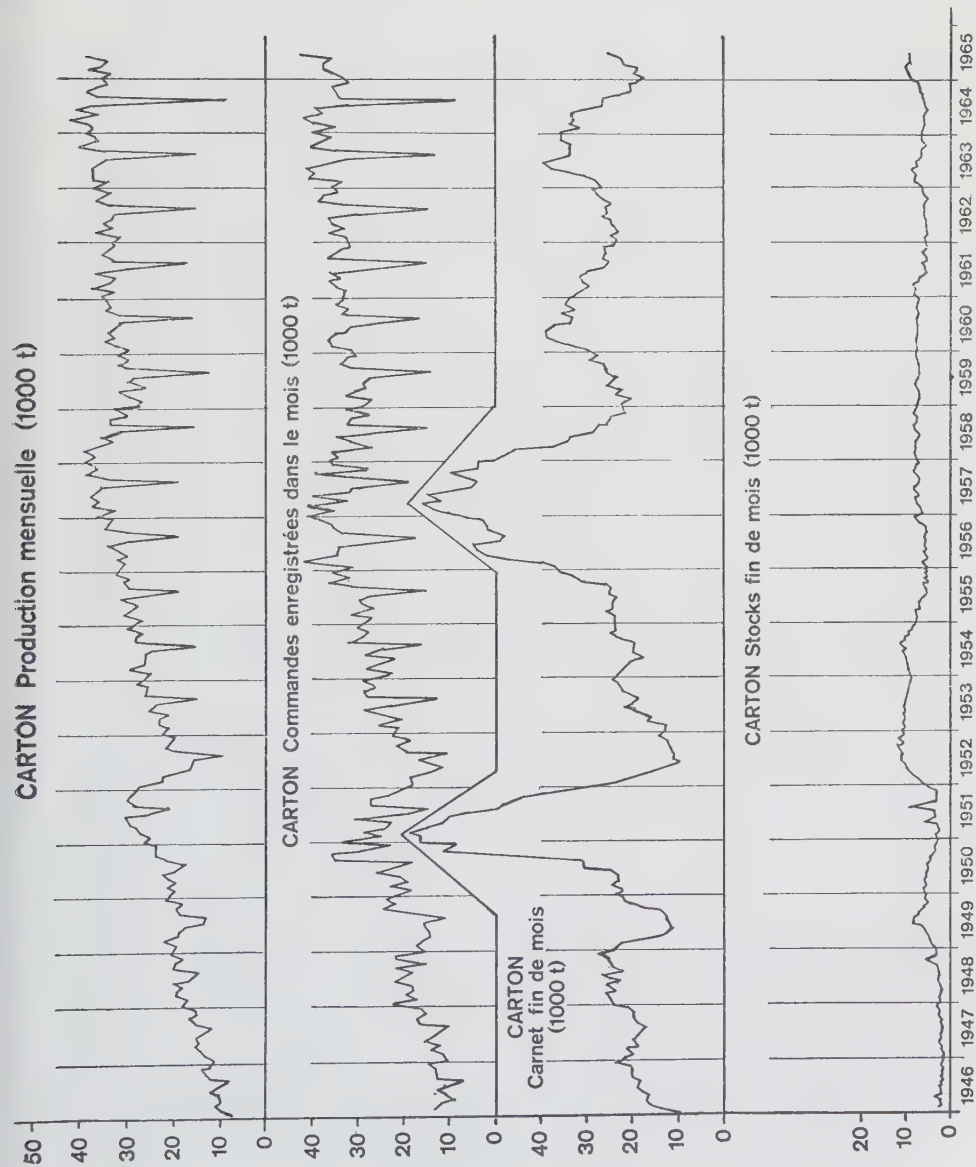

FIG. 6-10.

FIG. 6-11.

FIG. 6-12.

FIG. 6-13.

Notons d'ailleurs que les quatre chroniques envisagées ne sont pas indépendantes; il existe entre elles une relation facile à mettre en évidence. En effet, le carnet de commande à l'instant t est égal au carnet de commande à l'instant $t - 1$, augmenté des commandes enregistrées entre $t - 1$ et t et diminué des livraisons effectuées entre $t - 1$ et t; avec des notations évidentes :

$$C\,C\,(t) = C\,C\,(t - 1) + C\,E\,(t - 1, t) - \text{Livraison}\,(t - 1, t)$$

mais, de même, les livraisons entre $t - 1$ et t sont égales à la production de cette même période corrigée des variations de stocks :

$$\text{Livraison}\,(t - 1, t) = P\,N\,(t - 1, t) + S\,(t - 1) - S\,(t)$$

en remplaçant cette expression des livraisons dans l'égalité précédente :

$$C\,C\,(t) = C\,C\,(t - 1) + C\,E\,(t - 1, t) - P\,N\,(t - 1, t) + S\,(t) - S\,(t - 1).$$

Ceci posé, le problème de l'analyse du comportement des chefs d'entreprise en matière de production peut se formuler dans les termes suivants :

1) Sur quelle information les chefs d'entreprise règlent-ils principalement leur production ? Est-ce sur les stocks, le carnet de commande, ou les commandes enregistrées ? et suivant quelles modalités ce réglage s'opère-t-il ? On sent bien, d'après les graphiques temporels que c'est sur les commandes enregistrées que le réglage est principalement effectué, mais on peut difficilement définir sa nature exacte, et préciser le rôle que jouent le carnet de commandes et les stocks.

2° Réciproquement, comment les chefs d'entreprises réagissent-ils aux variations de la demande qui leur est adressée ? Jouent-ils sur la production, les stocks ou le carnet de commande et dans quelles proportions ?

La réponse à ces questions aurait pu être recherchée dans les analyses de corrélation classique; toutefois, on aurait ainsi dégagé, comme on l'a montré au chapitre précédent, un comportement moyen, synthèse d'attitudes à long terme et à court terme peut-être fort différentes, et dont la signification n'aurait finalement pas été aussi précise que les tests statistiques usuels l'auraient pu laisser supposer. On pallierait dans une certaine mesure à cet inconvénient en calculant les corrélations successivement avec plusieurs unités de mesure du temps, par exemple d'abord à l'échelle du mois, puis à l'échelle des 2 mois, 6 mois et finalement à l'échelle de l'année; et les différences trouvées auraient été imputées à la longueur de la période unitaire choisie, les corrélations à 1 mois mettant l'accent sur les phénomènes à court terme, et celles trouvées avec une unité de temps annuelle traduisant des enchaînements de plus longue période; mais il n'en subsisterait pas moins une certaine indétermination sur la pureté des liens mis en évidence et sur leur domaine de validité. L'analyse spectrale par contre fournit faci-

lement la nature des enchaînements causaux suivant la période d'oscillation et montre ainsi sans ambiguïté la manière dont on passe d'un type d'enchaînement à l'autre quand la période d'oscillation varie.

Quelques mots sur les procédures d'estimations : sur la période retenue (janvier 1948 - juin 1965), on dispose de 209 observations mensuelles, ce qui permet d'estimer les spectres et spectres croisés en 42 points de fréquences, de la fréquence 1/84 (période 7 ans) à la fréquence 1/2 (période 2 mois). On saisira ainsi d'une manière encore incertaine le cycle de 8 ans, mais avec une précision suffisante les oscillations plus courtes. Enfin, mentionnons que les séries utilisées n'étaient pas désaisonnalisées : comme on l'a vu, la désaisonnalisation aurait pu altérer les décalages à mettre en évidence.

La formule d'estimation spectrale utilisée a été celle de Parzen; 42 décalages ont été introduits; enfin, en raison des risques de contamination dus aux trends et aux variations saisonnières des chroniques, celles-ci ont été filtrées par la relation :

$$y_t = x_t - 0{,}95\, x_{t-1} - 0{,}5\, (x_{t-12} - 0{,}95\, x_{t-13})$$

et c'est le spectre de y_t qui a été estimé, puis « recoloré » pour redonner celui de x_t. La procédure a été efficace comme le prouve la figure 34 où l'on voit le spectre de la série des stocks et celui de la série filtrée correspondante, qui est beaucoup plus plat que le premier.

Voyons ce qu'apprend l'analyse spectrale, et tout d'abord, les spectres simples; ceux-ci (fig. 6-14, 15, 16, 17) présentent l'allure habituelle des spectres des chroniques économiques : très élevés aux basses fréquences, en raison de l'existence d'un trend et de fluctuations de longue période, ils décroissent ensuite régulièrement, avec des pointes locales qui proviennent des variations saisonnières. On notera en passant que les quatre séries présentent ces pointes saisonnières : celles de la production et des commandes enregistrées sont très accusées, et cela confirme l'impression qui s'était dégagée à la vue des données temporelles qui paraissaient très saisonnières; mais celles des stocks et du carnet de commandes n'en sont pas moins très nettes non plus, alors que ces deux chroniques ne semblaient pas de prime abord présenter de saisonnalité.

Les spectres croisés fourniront eux l'essentiel des renseignements sur les liens entre séries.

Prenons d'abord une vue d'ensemble des décalages : ceux-ci sont repris sur les graphiques ci-contre (fig. 6-18, 19, 20, 21, 22, 23) qui les montrent exprimés d'une part en fraction de la période de l'oscillation à laquelle ils se rapportent et d'autre part en mois. On notera tout d'abord leur allure heurtée, et on se rappellera, en les interprétant, que la précision de la détermination de chaque point de ces graphiques est d'autant meilleure que la cohérence correspondante est plus élevée; compte tenu de ces remarques, on voit que les décalages des couples où interviennent les stocks sont à peu

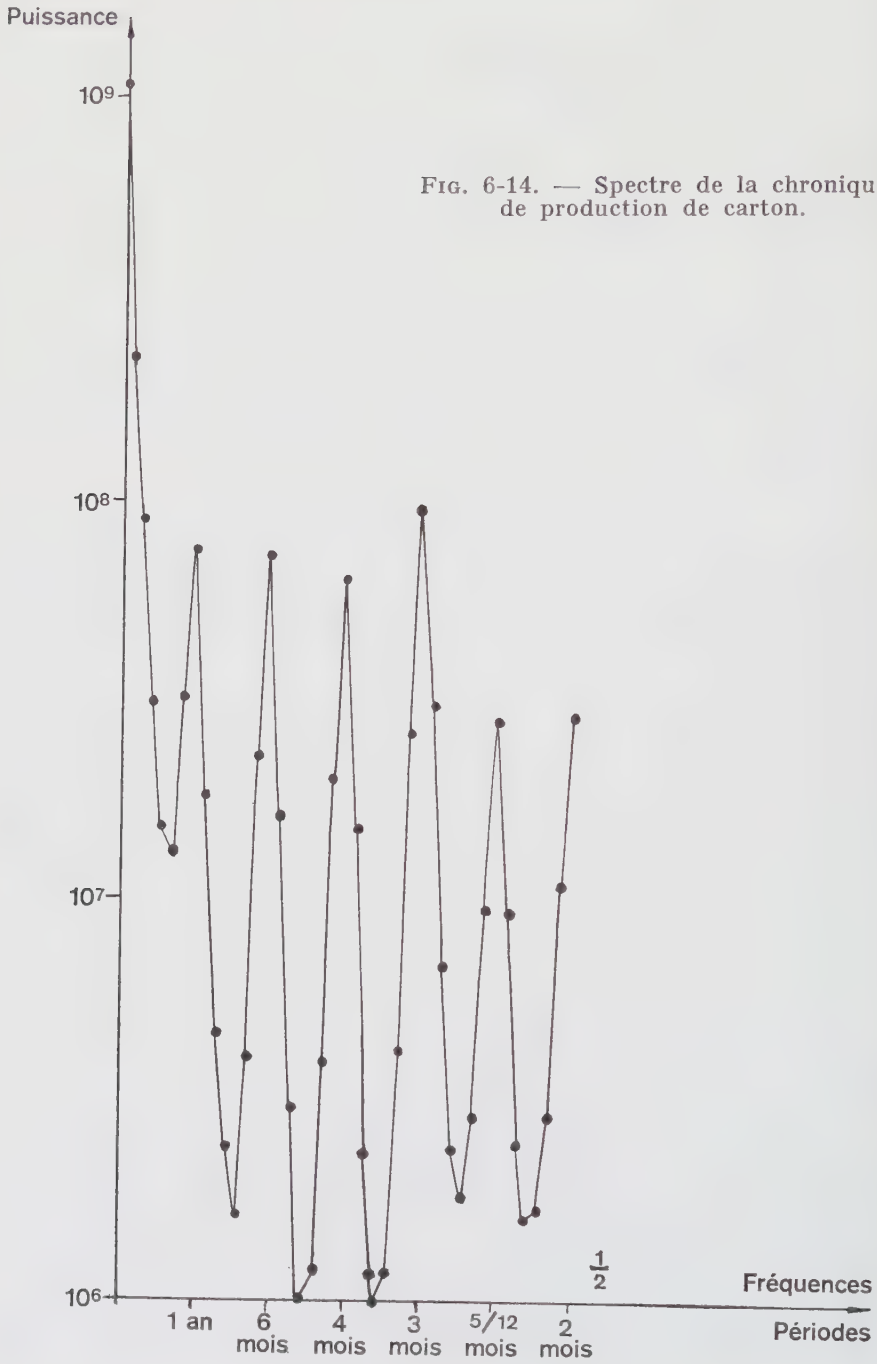

FIG. 6-14. — Spectre de la chronique de production de carton.

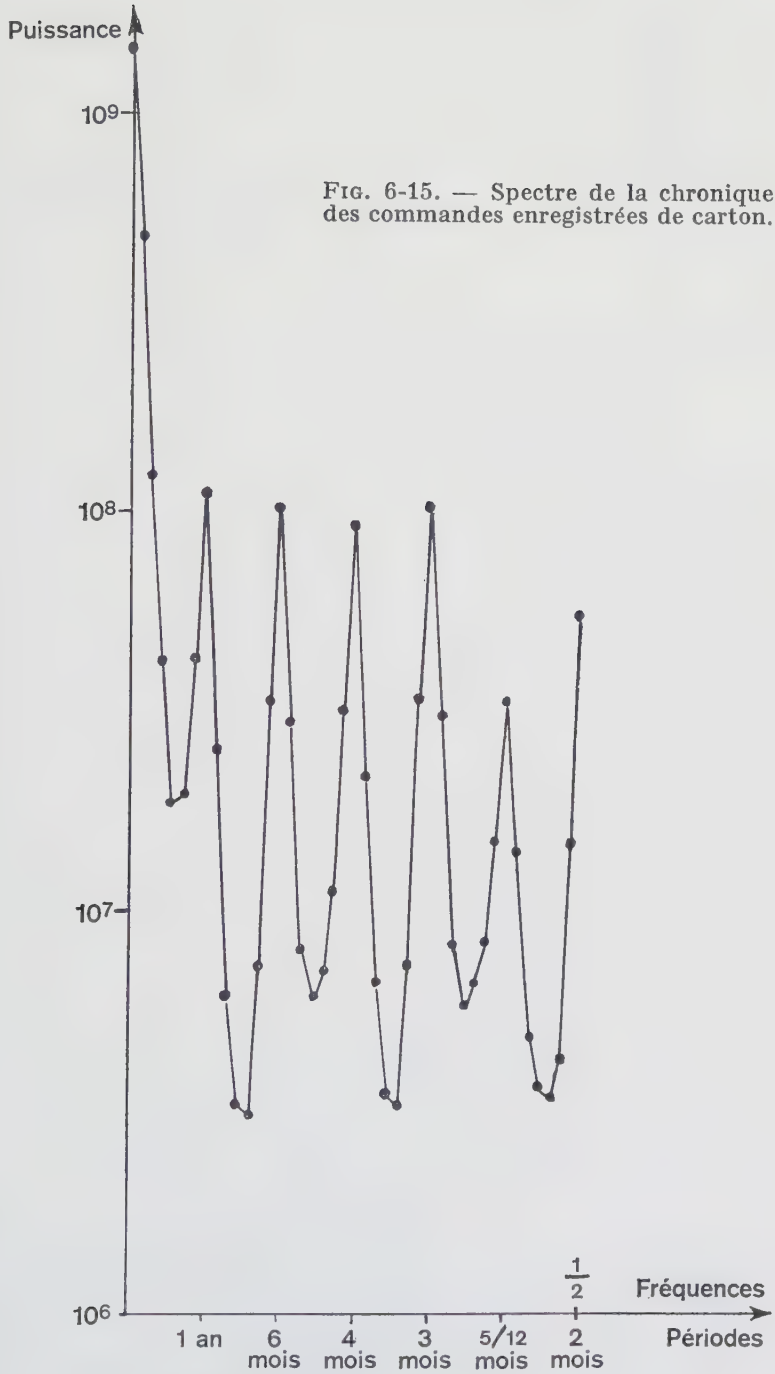

FIG. 6-15. — Spectre de la chronique des commandes enregistrées de carton.

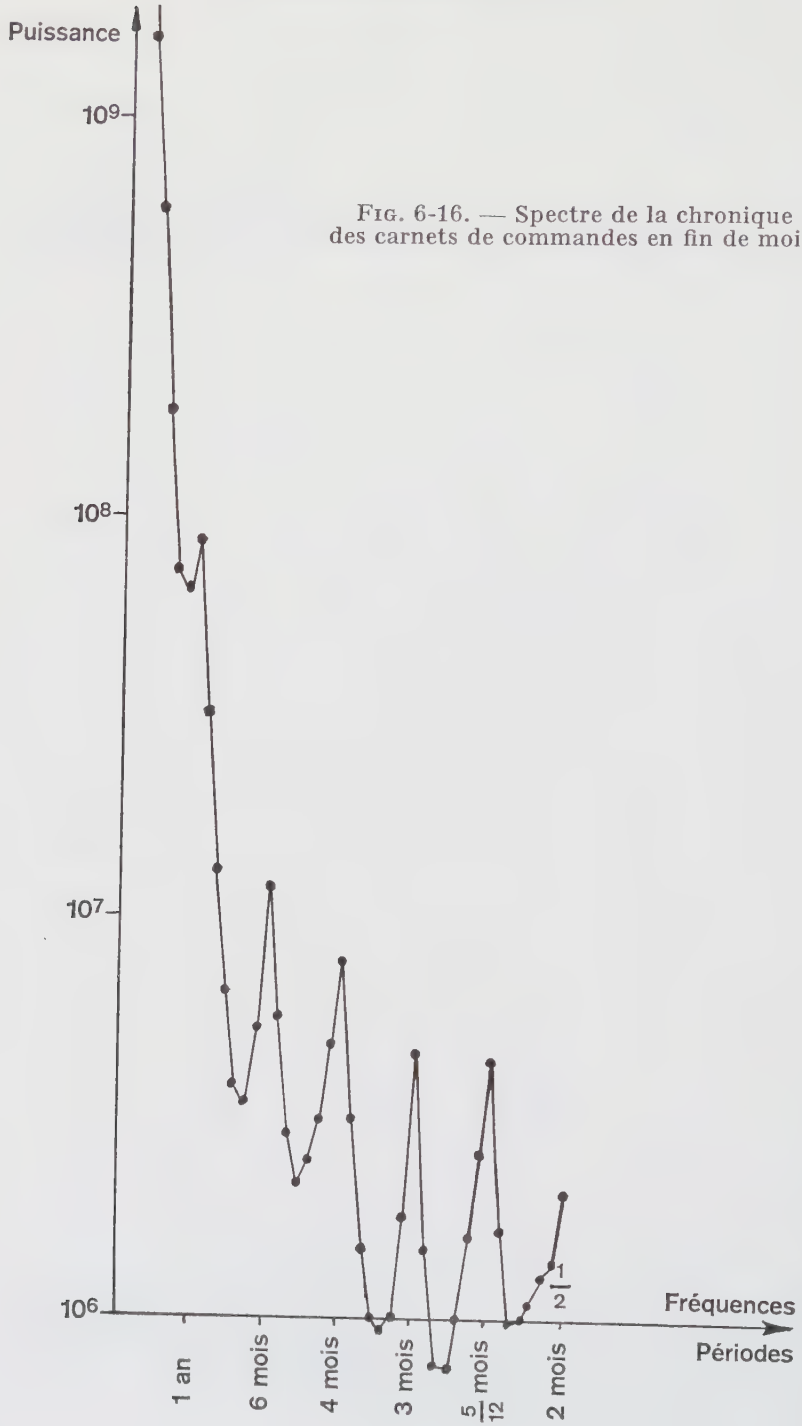

FIG. 6-16. — Spectre de la chronique des carnets de commandes en fin de mois.

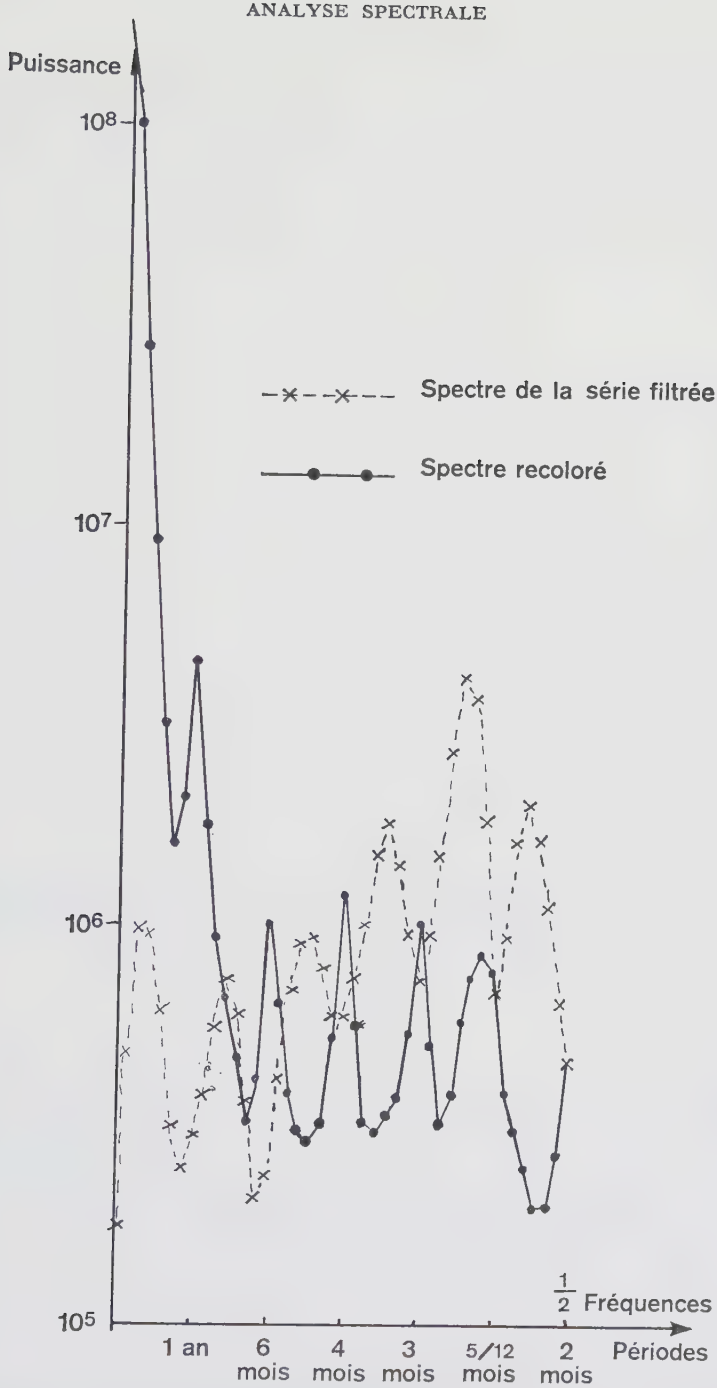

FIG. 6-17. — Spectre de la chronique des stocks de carton en fin de mois.

près égaux à une demi-période : les oscillations des stocks sont opposées à celles des trois autres données.

En ce qui concerne le décalage entre production et carnet de commande, on voit que celui-ci exprimé en fraction de période varie à peu près linéairement de 0 à 180°; exprimé en durée, il est grossièrement égal à 1 mois : on trouve donc un résultat auquel il fallait s'attendre, à savoir que la production au cours d'un mois donné est liée au carnet de commande du début du mois.

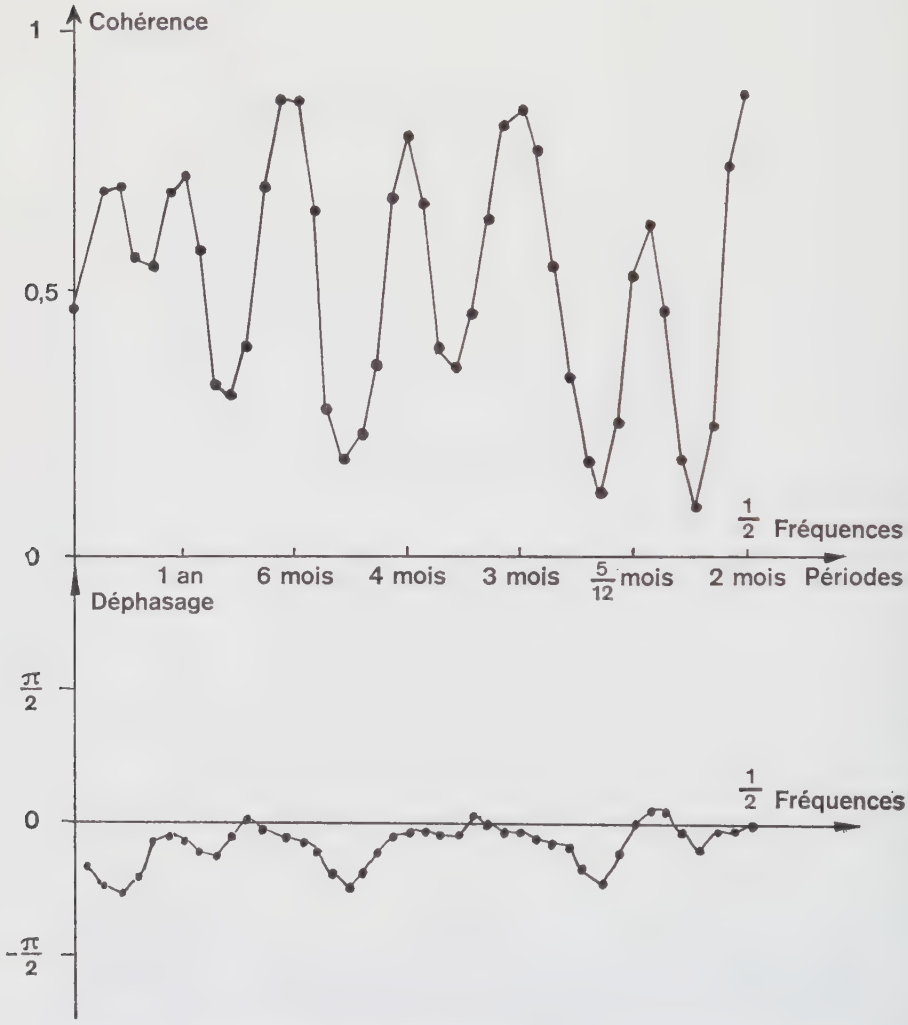

FIG. 6-18. — Spectre croisé. Production - Commandes enregistrées.

Quant aux décalages entre commandes enregistrées et production d'une part, commandes enregistrées et stocks d'autre part, exprimées en mois, ils sont d'autant plus faibles que la période de l'oscillation est faible, mais exprimées en fraction de période, ils sont dans l'ensemble assez indépendants

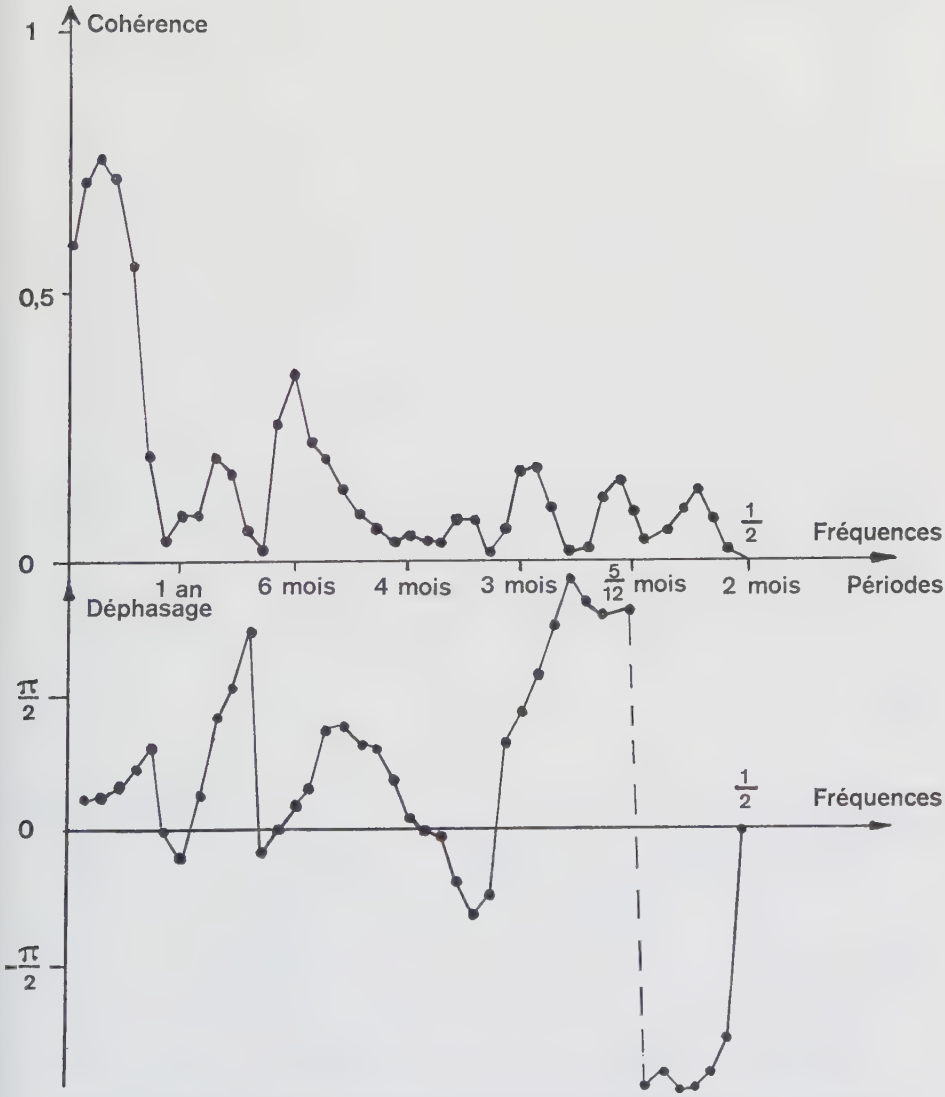

Fig. — 6-19. — Spectre croisé. Carnets de commandes - Production.

de la fréquence; le délai de réaction des chefs d'entreprises aux variations de la demande dépend donc de la rapidité des oscillations de cette demande : si celle-ci se modifie brusquement (fluctuations courtes) la réaction est rapide; si au contraire, elle varie plus lentement (fluctuations de période plus longue)

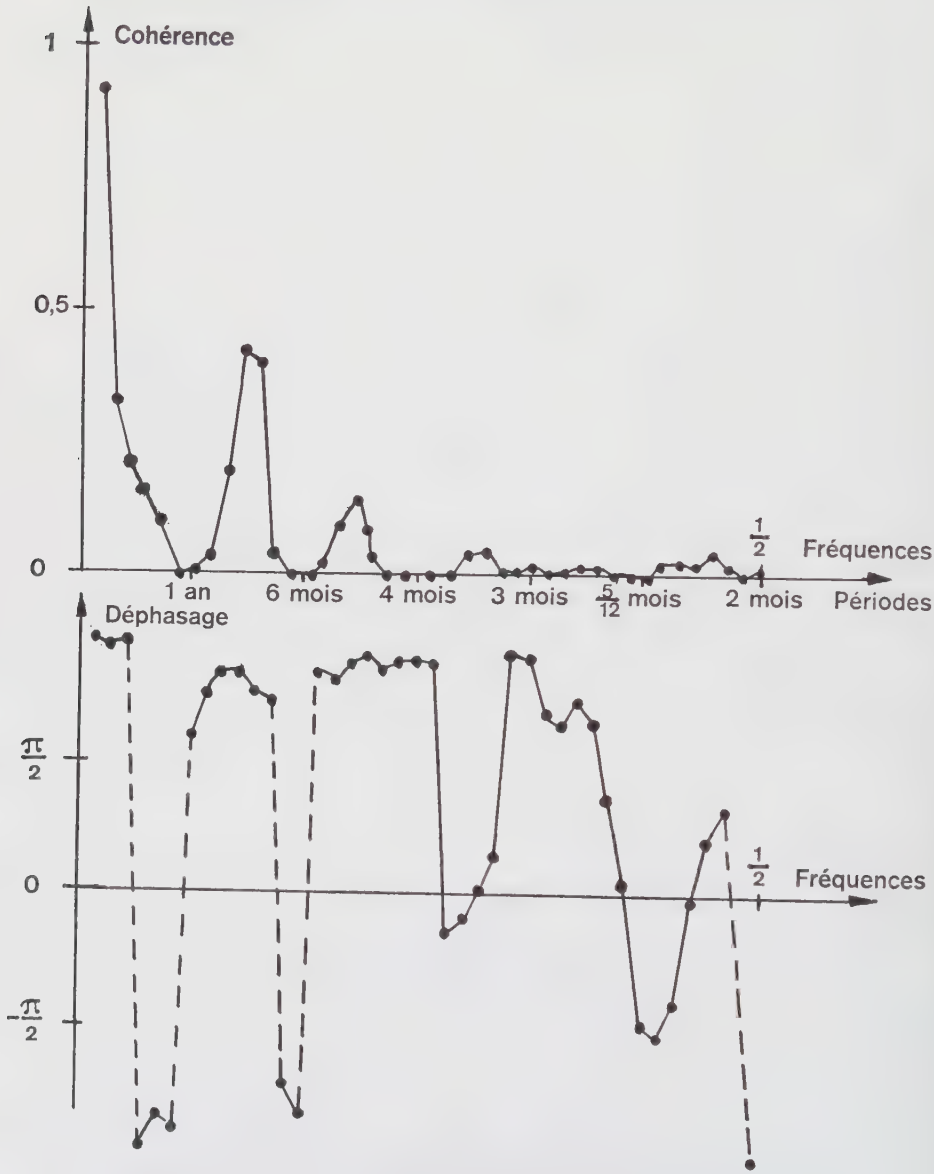

FIG. 6-20. — Spectre croisé. Stocks - Production.

la réaction est plus lente. Il y a donc une sorte d'hystérésis dans la perception des mouvements et cette hystérésis est plus forte pour les changements lents dont les chefs d'entreprise prennent une conscience plus tardive, que pour les changements brusques. Ce type d'adaptation est somme toute très logique,

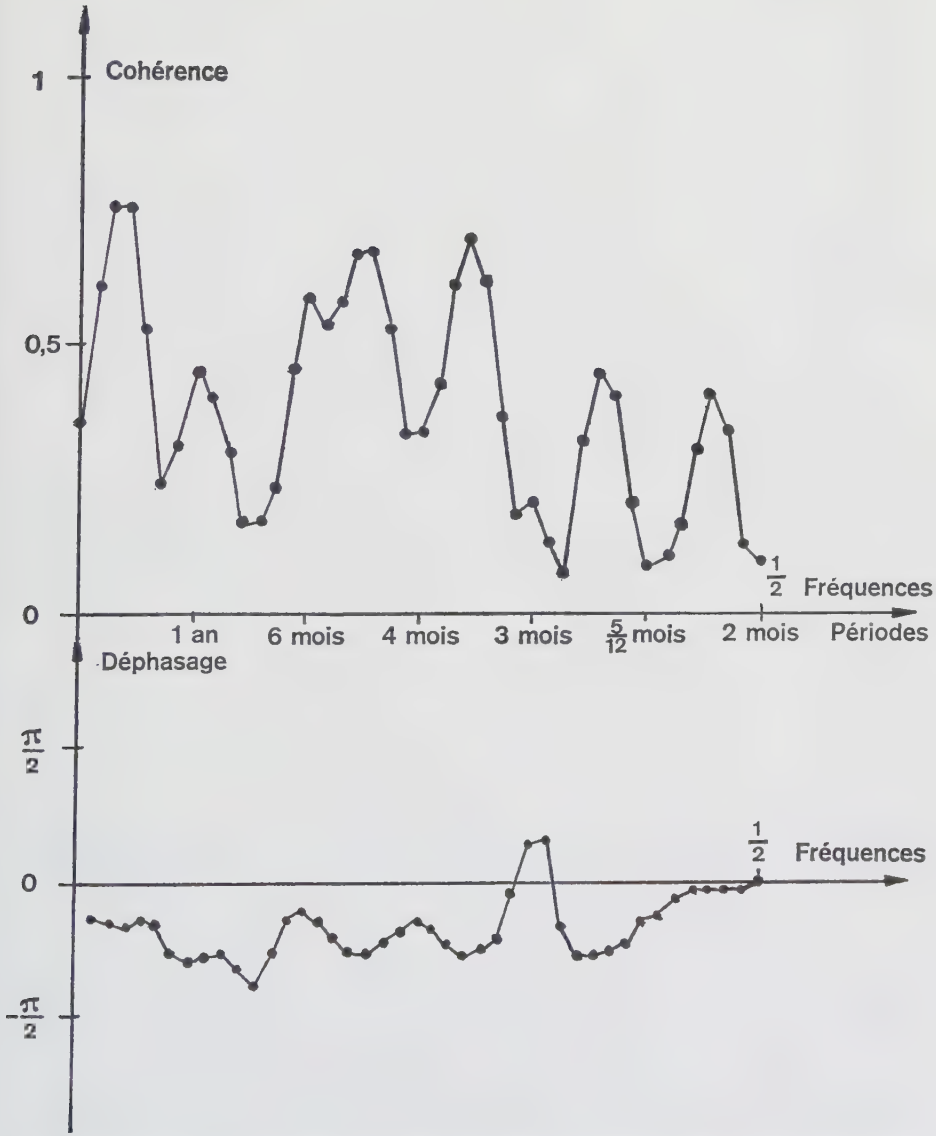

FIG. 6-21. — Spectre croisé. Carnet de commandes - Commandes enregistrées.

mais il est bien différent des retards généralement considérés en économétrie classique; celle-ci s'est presque toujours attachée, soit à des décalages purs et simples avec une constante de temps indépendante de l'ampleur du mouvement, du type $y_t = a\, x_{t-1}$, soit à des retards échelonnés exponentiels,

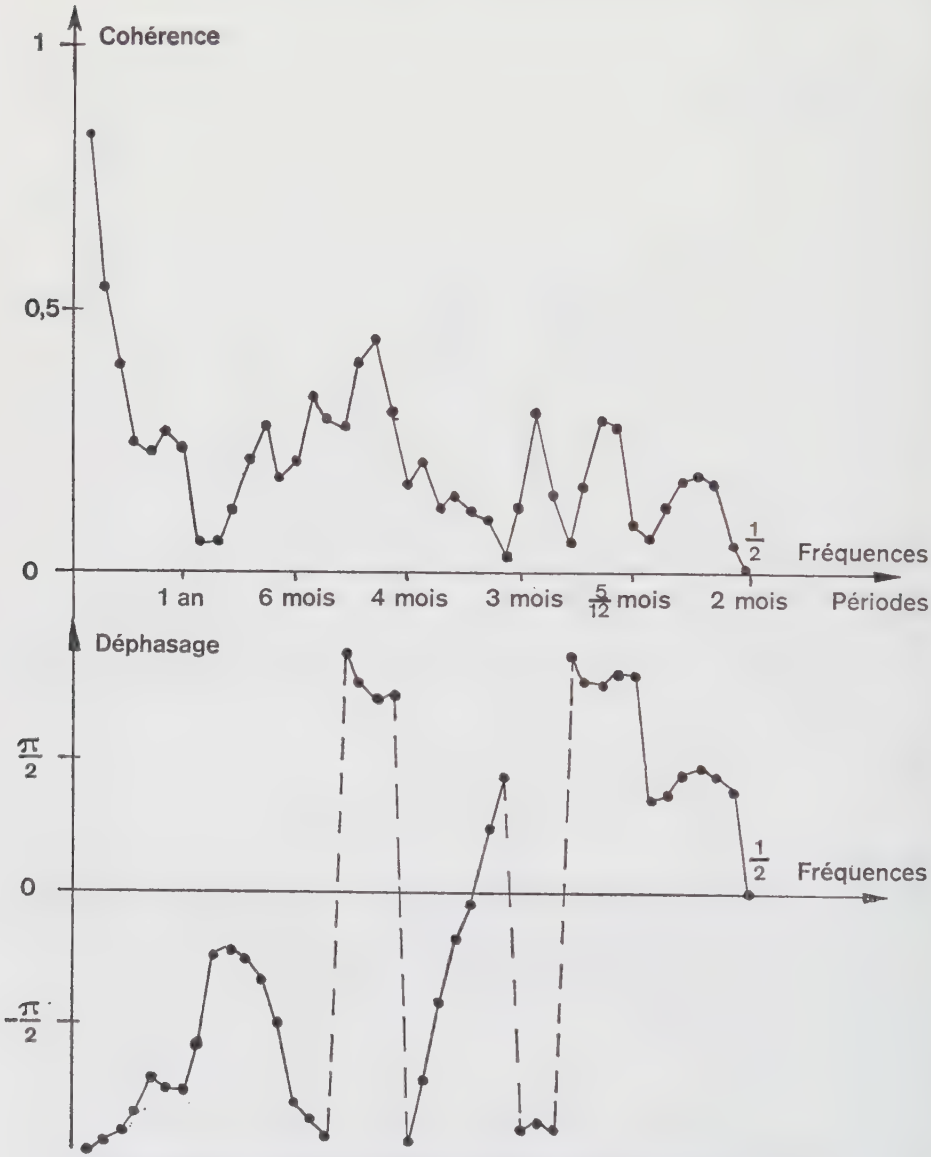

FIG. 6-22. — Spectre croisé. Stocks - Carnet de commandes.

s'exprimant par une relation du type :

$$y_t = -x_t + a\, x_{t-1} + \ldots + a^n\, x_{t-n} + \ldots$$

or cette égalité se transforme facilement en :

$$y_t = a\, y_{t-1} + x_t$$

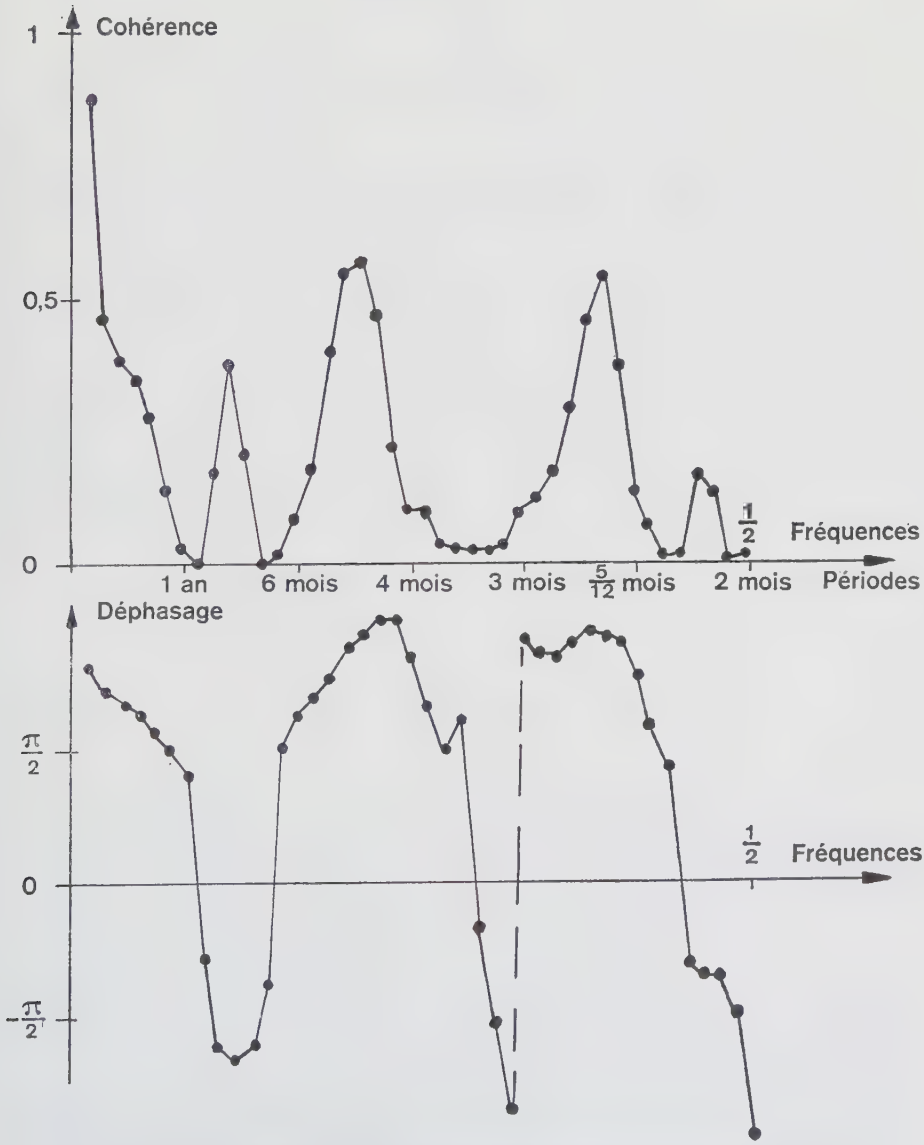

FIG. 6-23. — Spectre croisé. Commandes enregistrées - Stocks.

et il serait aisé de montrer que le décalage φ entre x_t et y_t exprimé en fraction de la période T de l'oscillation est donnée par la relation :

$$\varphi = \text{Arc tg} \frac{1 - a \cos \frac{2\pi}{T}}{a \sin \frac{2\pi}{T}}$$

et l'on voit que φ varie avec la période T.

Si maintenant on veut se livrer à une analyse plus fine, il est nécessaire de distinguer trois cas :

a) D'abord, celui des oscillations supérieures à un an. Pour elles, la cohérence des différentes séries entre elles est assez élevée et en dehors des valeurs aberrantes supérieures à l'unité [1], elle est maximum pour les oscillations de période 2 à 3 ans :

Cohérence entre carnet de commande et commandes enregistrées ...	0,78
— — production et carnet de commandes	0,75
— — production et commandes enregistrées	0,70
— — stocks et carnet de commandes	0,50
— — stocks et commandes enregistrées	0,40
— — stocks et production	0,25

Les décalages correspondants ne sont pas contradictoires entre eux comme le montrent le tableau et le graphique ci-dessous (fig. 6-24) :

	Décalage	
	Radian	Mois
	—	—
P N en retard sur C E de	$\frac{\pi}{4}$	4
C C en retard sur C E de	$\frac{\pi}{6}$	2,5
P N en retard sur C C de	$\frac{\pi}{10}$	1,5
C C en retard sur S de	$\frac{9\pi}{10}$	13,5
C E en retard sur S de	$\frac{7\pi}{10}$	10,5
P N en retard sur S de	π	15

[1] Il est évidemment impossible que les cohérences vraies soient supérieures à un; si cela se produit pour les cohérences estimées, c'est que les formules d'estimation calculent non la cohérence moyenne autour d'une certaine fréquence, mais le rapport des moyennes du numérateur et du dénominateur de la fraction qui définirait la cohérence vraie.

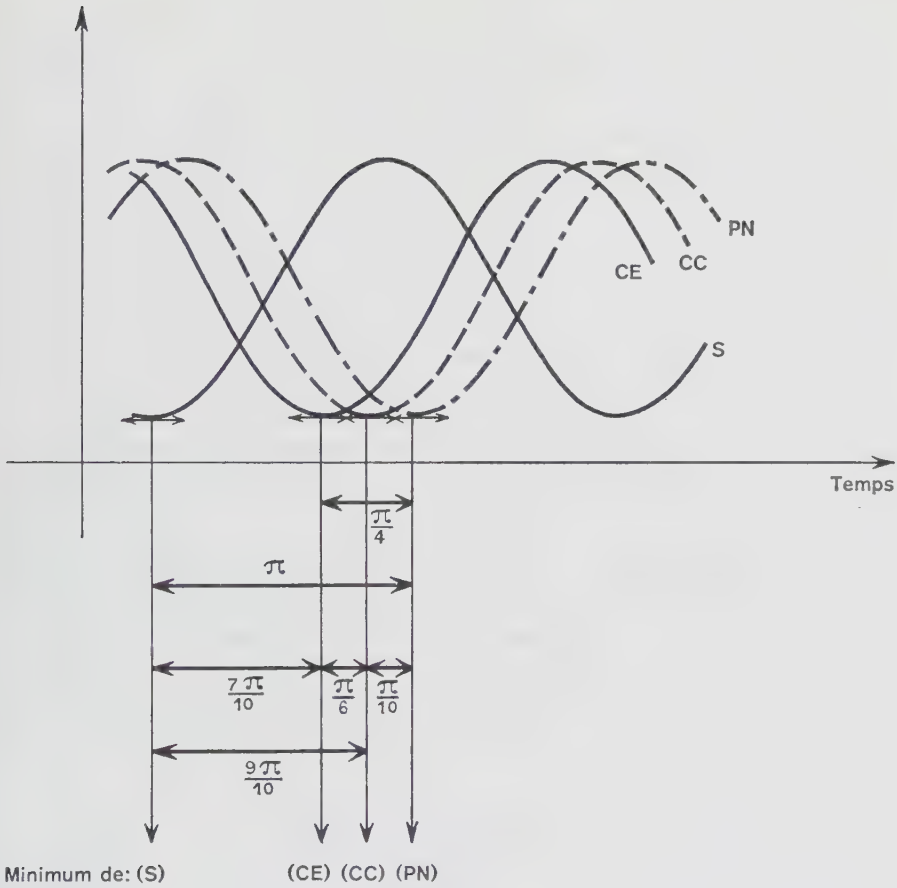

FIG. 6-24.

Ils conduisent à la succession suivante, qui définit la manière dont les chefs d'entreprise assurent le service de la demande qui leur est adressée : à un retournement des commandes enregistrées succède environ deux mois et demi après un retournement du carnet de commande, la production ne change de sens qu'au bout de quatre mois, et les stocks varient en même temps que la production mais en sens contraire d'elle.

Ces résultats ont une conséquence pratique importante; si pour la prévision les stocks et les carnets de commandes sont des éléments intéressants, ceci est encore plus vrai des commandes enregistrées qui sont en bonne corrélation avec la production et dont l'évolution est en avance sur celle des deux autres indicateurs : alors que les commandes enregistrées ont déjà repris, le carnet de commande continue à se dégrader, la production à diminuer et les stocks augmentent toujours.

Cherchons maintenant comment les chefs d'entreprise prennent leurs décisions de modification de production. Les cohérences ont montré que les deux facteurs les plus liés à la production sont le carnet de commande et les commandes enregistrées; c'est donc sur eux que nous porterons l'attention, en les associant tous les deux à l'explication de l'évolution de la production; ceci est possible au moyen de l'analyse spectrale, par l'intermédiaire des cohérences multiples des cohérences partielles et des déphasages partiels : leur présentation mathématique est détaillée en Annexe III, mais leur sens profond est assez simple et intuitif : on connaît, dans l'analyse de corrélation classique, la corrélation multiple entre une variable à expliquer et deux variables explicatives par exemple; elle mesure la qualité de l'explication par l'ensemble de ces deux variables; de même, la corrélation partielle entre x et y à z donné indique dans quelle mesure quand on se fixe z, y est lié à x. Ces notions admettent une généralisation immédiate dans le cas de l'analyse spectrale : on peut définir et calculer, par exemple pour les oscillations de période 2-3 ans qui nous occupent ici, la cohérence multiple entre production d'une part, carnet de commande et commande enregistrée d'autre part, qui montrera dans quelle mesure les fluctuations de ces deux dernières quantités expliquent celles de la première; et des cohérences et déphasages partiels qui fourniront par exemple le degré de la liaison entre commandes enregistrées et production, à carnet de commande donné, ainsi que le décalage entre ces deux quantités quand on se fixe la dernière. Les calculs numériques qui ne présentent d'autre difficulté que leur longueur conduisent aux résultats suivants, à partir des oscillations de période 30 mois.

Cohérence multiple entre	
P N (t — 1, t), d'une part,	
C C (t) et C E (t — 1, t), d'autre part	0,98
Cohérence partielle entre	
P N (t — 1, t) et	
C E (t — 1, t) à C C (t) donné	0,93
Décalage entre	
P N (t — 1, t) et	
C E (t — 1, t) à C C (t) donné	quelques semaines
Cohérence partielle	
P N (t — 1, t) et	
C C (t) à C E (t — 1, t) donné	0,90
Décalage entre	
P N (t — 1, t) et	
C C (t) à C E (t — 1, t) donné	environ 6 mois

La valeur élevée de la cohérence multiple montre que les chefs d'entreprise règlent leur production à peu près uniquement sur les commandes enregistrées et le carnet de commandes; ces deux éléments ont une importance comparable dans l'esprit des chefs d'entreprises, comme le montrent les cohérences partielles qui sont fortes. Mais les décalages partiels font voir que leurs modalités d'intervention sont très différentes : il y a pratiquement concomitance, aux délais de mise en route des fabrications près, entre production et commandes enregistrées; mais l'adaptation de la production au carnet de commandes est moins simple; le décalage partiel est de 6 mois, très différent du décalage simple de un à deux mois qui avait été mis en évidence précédemment, et qui n'était pas pur, puisqu'il intégrait l'effet de la variation des commandes enregistrées sur le carnet de commandes, alors qu'ici il est fait abstraction des commandes enregistrées.

Ce décalage de 6 mois est donc légèrement inférieur à 1/4 de période, soit 7,5 mois; or le délai de 1/4 de période constitue une référence importante, car c'est celui qui interviendrait, à commandes enregistrées stables, s'il n'y avait pas d'adaptation volontaire de la production sur le carnet de commandes : à ce moment-là, si la production est inférieure à la moyenne, le carnet de commandes se gonfle, et si elle est supérieure à la moyenne, il se vide; les deux oscillations seraient alors dans les situations respectives représentées par la figure ci-dessous (fig. 6-25).

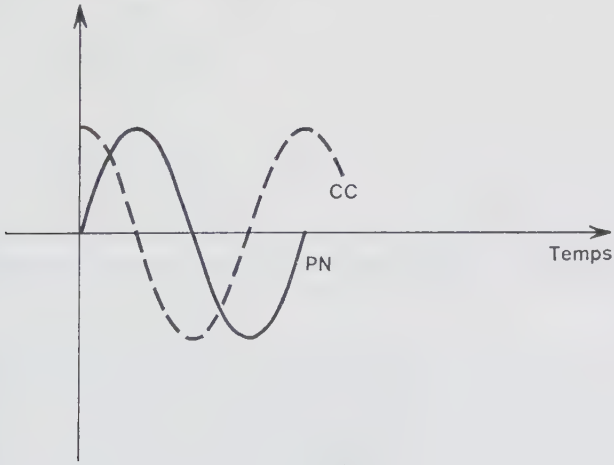

Fig. 6-25.

Le fait que le décalage soit un peu plus faible que 7,5 mois semble montrer que les chefs d'entreprise anticipent de un à deux mois l'évolution du carnet de commande qui leur sert en quelque sorte d'indicateur.

Les chefs d'entreprise règlent donc leur production sur deux facteurs : l'un est technique, mécanique, automatique, c'est le flux de commandes

enregistrées, le deuxième correspond davantage à une décision libre : c'est le carnet de commandes [1].

b) Penchons-nous maintenant sur les oscillations infra-annuelles saisonnières, qui correspondent aux périodes 6, 4, 3, 5/12, et 2 mois.

Seul le couple production-commandes enregistrées présente alors des cohérences élevées. Pour les quatre autres couples, la cohérence est très basse. C'est donc que le mouvement saisonnier des commandes enregistrées se modèle très étroitement sur la production mais que les deux autres mouvements saisonniers sont en quelque sorte dissociés de ceux des deux premières séries, et dissociés entre eux; ceci peut d'ailleurs se concevoir aisément : l'adaptation production-commandes enregistrées présente une certaine automaticité; même si le mouvement saisonnier des commandes et son évolution sont mal perçus par l'entrepreneur, ils ne s'en répercuteront pas moins sur la production. Par contre, les stocks et le carnet de commandes sont davantage soumis à la liberté de décision du chef d'entreprise et il n'y a pas de raison pour que celui-ci veuille calquer leur évolution saisonnière sur celle d'une autre variable.

c) Si, pour finir, on se place aux fréquences infra-annuelles non saisonnières les cohérences les plus fortes sont, par opposition au cas précédent, obtenues à partir des autres couples de variables, les meilleures étant celles existant entre C E ($t - 1$, t) et C C (t) et entre C E ($t - 1$, t) et S (t), les autres restant assez faibles. Si la production semble fixée d'une manière erratique, on voit par contre apparaître un lien non négligeable entre les fluctuations courtes des stocks et du carnet de commandes d'une part, des commandes enregistrées d'autre part.

Ainsi, les fluctuations de faible période des commandes enregistrées entraînent des décisions différentes suivant qu'elles correspondent ou non aux variations saisonnières.

Dans le cas des variations saisonnières, l'adaptation, comme on l'a vu, se fait principalement par la production; pour les autres oscillations, non saisonnières, leur effet se fait surtout sentir sur les stocks et le carnet de commandes.

On peut s'étonner d'une telle dualité; l'explication qui en est proposée est la suivante : parmi les fluctuations infra-annuelles des commandes enregistrées, les plus importantes sont de très loin celles dues aux variations saisonnières; les entrepreneurs les ressentent donc avec force et y répondent par une augmentation de la production, car leurs stocks sont peu élevés

[1] Comme il y a entre stocks, production, carnet de commandes et commandes enregistrées une identité comptable, l'analyse précédente aurait pu être effectuée sur les stocks tout autant que sur le carnet de commandes. Toutefois, la faible cohérence constatée (0,25) entre production et stocks conduisait à leur préférer l'analyse par le carnet de commandes.

Ajoutons que la cohérence partielle entre stocks et production à commandes données, qui a été calculée, est encore plus faible (0,15), ce qui est une raison supplémentaire de préférer le carnet de commandes aux stocks comme facteur explicatif de la production.

et les délais de livraison habituels de la profession les empêchent de trop jouer sur leur carnet de commandes; par contre, pour les autres oscillations non saisonnières des commandes enregistrées, d'amplitude plus modérée et à caractère plus aléatoire, moins prévisible, que les précédentes, les chefs d'entreprise peuvent se servir de leurs stocks, et jouer sur leur carnet de commandes pour amortir les chocs. C'est donc en définitive l'importance comparée des stocks et du carnet de commandes d'une part, des flux de commande d'autre part, qui expliquent les différences observées; les stocks et les délais de livraison — ces derniers par l'intermédiaire du carnet de commandes — amortissent les mouvements de faible importance et erratiques, alors que l'adaptation aux mouvements réguliers et forts que sont les variations saisonnières s'effectue surtout par la production.

Un dernier élément précise cette hypothèse, c'est la considération des gains, qui sont les rapports entre amplitudes des oscillations de fréquence donnée de deux séries. On constate que si les gains du couple production-commandes enregistrées sont indépendants de la fréquence considérée, ceux des couples commandes enregistrées-stocks et commandes enregistrées-carnet de commandes sont au contraire beaucoup plus variables : ils sont faibles aux fréquences saisonnières, montrant que les stocks (ou le carnet de commandes) varient alors peu par rapport aux commandes enregistrées, et forts autrements, ce qui conduit à la conclusion inverse.

Enfin, pour en terminer avec cette étude, on peut s'étonner du peu de place qu'y ont joué jusqu'ici les stocks, alors que cet élément de la gestion de la firme a fait couler tant d'encre. On pourrait imputer ce fait à la perturbation qu'entraîne la présence des variations de la demande; aussi, pour éliminer cet élément, on a déterminé les cohérences partielles et les décalages partiels entre stocks et production à commandes enregistrées données; le graphique ci-joint (fig. 6-26) montre les résultats obtenus : la cohérence reste faible; quant au décalage, il évolue de manière complexe; pour en tirer des enseignements, nous comparerons ce décalage observé à celui que donneraient deux types d'adaptations :

1° Le premier, dans lequel les stocks ne seraient qu'un résidu de l'écart entre production et demande; alors, à demande donnée :

$$\mathrm{P\,N}\,(t-1,\,t) = S\,(t) - S\,(t-1)$$

et si

$$S\,(t) = a \cos \omega t$$

il est facile de voir que :

$$\mathrm{P\,N}\,(t-1,\,t) = a\,[\cos \omega t - \cos \omega\,(t-1)]$$

ou

$$\mathrm{P\,N}\,(t-1,\,t) = 2\,a \sin \frac{\omega}{2} \cos \left(\omega t + \frac{\omega}{2} - \frac{\pi}{2}\right).$$

La période serait alors en avance sur les stocks et le déphasage $\frac{\pi}{2} - \frac{\omega}{2}$ variable avec la période de l'oscillation est représenté par la droite 1 de la figure 6-26.

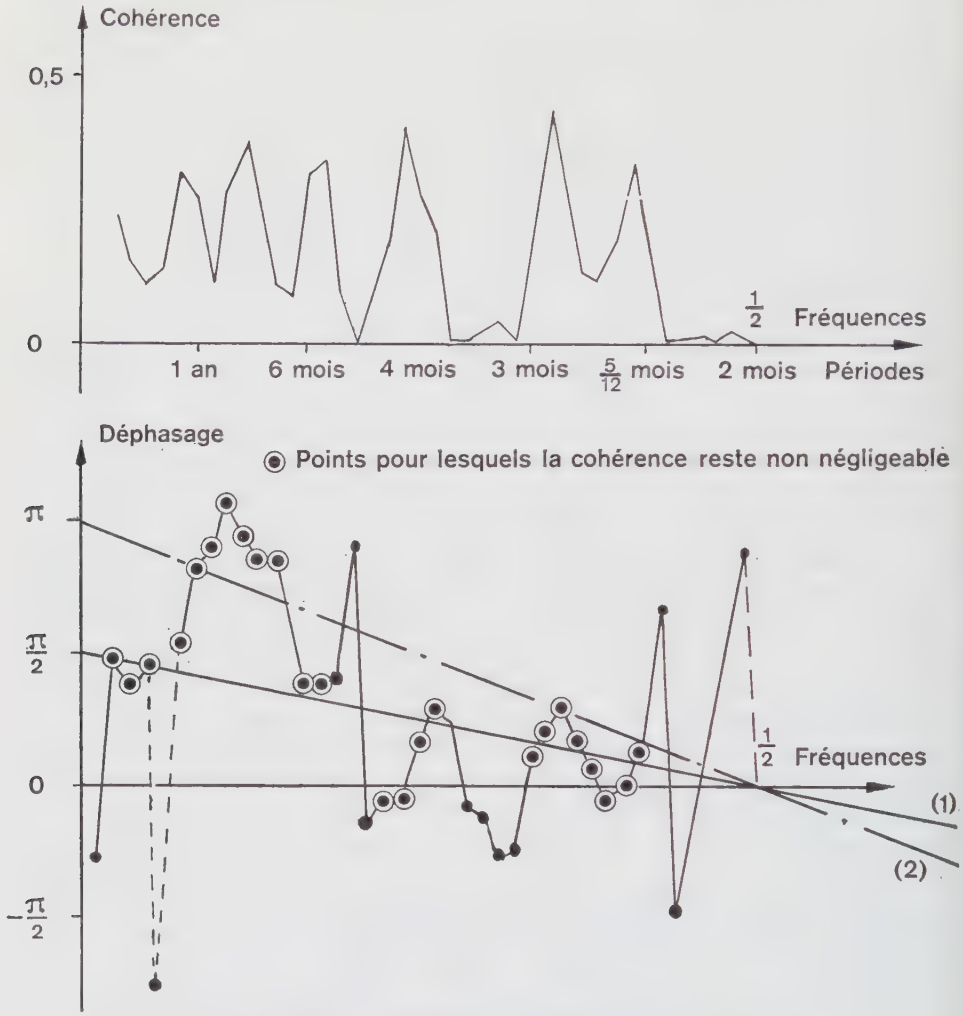

FIG. 6-26. — Spectre croisé partiel entre Stocks et Production à Commandes enregistrées données.

2° Le second, plus conforme au principe d'accélération pour lequel la production s'adapterait aux stocks en s'efforçant de les ramener à un niveau jugé normal S_0. Alors, toujours à demande donnée :

$$\mathrm{P\,N}\,(t-1,\,t) = -\,(S_{t-1} - S_0)$$

et si

$$S_t = a \cos \omega t$$

$$\mathrm{P\,N}\,(t - 1, t) = a \cos (\omega t - \omega + \pi)$$

Le déphasage $\pi - \omega$ est représenté sur le diagramme par la droite 2.

L'examen de cette figure montre que, dans l'ensemble, les points du diagramme des phases sont plutôt plus proches de la droite 1 que de la droite 2.

Les stocks apparaîtraient donc comme un résidu, sauf peut-être pour les périodes comprises entre 6 mois et 1 an, pour lesquelles le décalage entre stocks et production est plus élevé et semble mieux correspondre à une adaptation volontaire de la production pour ramener ceux-ci à un niveau normal.

Ces résultats sont évidemment très fragmentaires et ont parfois été tirés de manière bien audacieuse. Ils n'en ouvrent pas moins, semble-t-il, certaines perspectives intéressantes : c'est ainsi qu'il apparaît que les comportements des entrepreneurs sont, même à l'intérieur de ce qu'on considère comme le court terme, différents suivant la longueur des fluctuations auxquelles ils sont soumis; de même, un type d'adaptation jusqu'ici rarement mis en évidence par les méthodes classiques a été rencontré : c'est celui que nous appellerions volontiers à déphasage constant, pour lequel le temps d'adaptation est proportionnel à la longueur de l'oscillation de la variable causale.

***

On peut maintenant conclure sur l'intérêt et les limites de l'analyse spectrale.

Sur le plan statistique, d'abord, elle présente les avantages et les inconvénients des méthodes non paramétriques : ne nécessitant que des hypothèses a priori relativement faibles, elle s'applique à des cas beaucoup plus larges que les modèles linéaires habituels, mais évidemment, les résultats qu'elle fournit sont moins précis; on l'a ressenti tout au long des exemples présentés : les spectres estimés sont très fluctuants ainsi que les cohérences et les décalages des spectres croisés. Sous un angle plus mathématique, les intervalles de confiance des estimations sont en général très larges; ils sont d'ailleurs mal connus : ils n'ont été calculés que pour certains types de processus.

Enfin, la connaissance des spectres ne permet pas d'estimer les paramètres du modèle qui a engendré la chronique observée et les méthodes classiques des moindres carrés et du maximum de vraisemblance sont mieux adaptées à cet égard; tout au plus, l'analyse spectrale peut-elle permettre de choisir la classe à laquelle appartient le modèle : ceci se fera au moyen des spectres croisés qui montrent si les deux séries étudiées sont liées par un décalage de temps constant, par un déphasage constant ou par d'autres

relations telles que différenciation, intégration; et encore ce choix sera-t-il plus intuitif et visuel, que mathématique et rigoureux. Mais il prend en considération une bien plus vaste variété de relations que celles qui sont habituellement prises en compte en économétrie classique.

Sur le plan de la théorie économique, l'apport de l'analyse spectrale est très fécond : celle-ci donne un support concret à la notion maintenant classique de période, qui gardait jusqu'ici un caractère abstrait : en effet, on voyait mal comment s'enchaînaient entre elles les diverses périodes, comment on passait du court terme au long terme par exemple; définir la courte période par un intervalle de temps court ne fait que repousser la difficulté, car la juxtaposition d'une longue suite de tels intervalles nous conduit infailliblement au long terme; d'autre part, chaque intervalle de temps est à la fois un moment du court terme et un moment du long terme; les phénomènes qui s'y déroulent ne sont pas purs, mais les enchaînements causaux sont multiples, et on ne peut pas facilement les distinguer. Enfin, la distinction entre période longue et période courte, si elle est nette et précise sur le plan théorique, est beaucoup moins facile à cerner en pratique. Même si l'on a de bonnes raisons de penser qu'un mois c'est de la courte période et 10 ans de la longue période, il existera entre ces deux durées toute une frange à l'intérieur de laquelle les liens logiques seront particulièrement confus et les méthodes de séparation entre court terme, moyen terme et long terme [1], pour intéressantes et fructueuses qu'elles soient, n'en comportent pas moins une certaine part d'arbitraire.

Au contraire, avec l'analyse spectrale, tout s'éclaire et se simplifie : celle-ci décompose les mouvements économiques en oscillations dont les périodes varient continuement et permet pour chaque période d'étudier et de définir les liens causaux existant entre différentes séries. Cette notion mathématique de période recoupe tout à fait le terme économique, mais en plus elle lui donne une plus grande généralité et une plus grande souplesse; une plus grande généralité parce que, alors que l'économiste ne considérait jusqu'ici qu'un nombre fini, relativement petit et immanquablement arbitraire de périodes, l'analyse spectrale lui permet d'en embrasser un bien plus grand nombre, une infinité ; et une plus grande souplesse, car c'est l'analyse statistique qui permet de grouper les oscillations relatives à chacune de ces périodes en un petit nombre de classes à l'intérieur desquelles les lois sont identiques : la délimitation des différentes classes est alors presque automatique, et si des franges subsistent, ce n'est pas par imperfection de l'outil, mais en raison de la nature même des choses.

[1] *Cf.* en particulier C. Goux : *L'horizon prévisionnel* (1965).

TROISIÈME PARTIE

LE PRÉSENT LIÉ A LA FOIS AU PASSÉ ET AU FUTUR ; PRÉVISION ET DÉCISION ÉCONOMIQUES

Les schémas explicatifs exposés jusqu'ici gardaient un indéniable aspect mécanique, en ce sens que le présent s'y trouvait toujours déterminé, à un aléa près éventuellement, par le passé; aucune attention aiguë n'était portée au fait que les lois économiques, décrivant essentiellement les comportements d'individus ou de groupes, traduisent, par essence, un certain vouloir, tendu vers des buts à atteindre dans le futur. Un examen plus attentif doit en tenir compte : dans l'explication du présent, il faut faire état non seulement du passé, mais aussi du futur; non bien sur le futur réel, mais plutôt le futur prévu ou souhaité.

Certes, de telles considérations n'étaient pas totalement absentes : ainsi le principe d'accélération traduit par certains aspects une adaptation anticipée du capital aux variations futures de la demande, dont on pense qu'elle sera semblable à la variation qui vient d'être constatée. Mais elles n'intervenaient que furtivement, et c'est sur elles qu'on va maintenant se pencher de manière plus systématique.

A cet égard, l'opposition la plus tranchée avec ce qui précède se trouve dans la théorie de la décision; selon celle-ci, les décisions à prendre dépendent uniquement, comme on le verra, de la situation présente et de notre connaissance du futur. Si elle est envisagée la plupart du temps sous son aspect normatif de guide pour une action éclairée, elle peut également être appliquée à la construction de modèles explicatifs et son apport à cet égard sera examiné au chapitre suivant : « la prise en compte du futur; quelques aspects de la théorie de la décision ».

Mais il ne s'agit là que d'une théorie, il est nécessaire d'examiner dans quelle mesure les individus se conforment à ses préceptes, et également comment se forme en eux l'image du futur qui servira de base à leurs décisions : ce sera l'objet du chapitre 8 qui montrera comment on peut nuancer ce que la théorie avait de rigide et remplir les blancs qu'elle laisse subsister : « la prise en compte du futur; les mécanismes réels de prévision et de décision ».

CHAPITRE 7

LA PRISE EN COMPTE DU FUTUR : QUELQUES ASPECTS DE LA THÉORIE DE LA DÉCISION

La théorie de la décision, dans ce qu'elle intéresse l'économiste, présente de nombreux points communs avec certaines hypothèses de la théorie statique de l'équilibre telle qu'elle a été présentée par Walras et développée par les néo-classiques. Comme cette dernière, elle suppose que l'individu est raisonnable, logique avec lui-même, cohérent dans ses choix; qu'il peut se définir à lui-même une échelle de préférence, à partir de laquelle il classe tous les événements qui le concerne. On se trouve alors en présence d'une version de l'« homo économicus » cherchant à rendre sa satisfaction maximale, avec la différence importante que cette satisfaction ne résulte plus seulement d'un complexe de situations hors du temps, mais d'un ensemble de faits à venir, se rapportant éventuellement à des moments différents du futur.

Comment cet objectif peut-il être atteint ? La réponse à cette question fera l'objet des sections suivantes : la première recensera les différents degrés dans la connaissance des événements à venir; la deuxième exposera par quels processus, pour chacun de ces degrés, l'objectif de satisfaction maximum peut être atteint. Enfin, la troisième section montrera quelques apports de ces méthodes à l'analyse économique.

I - LES DIFFÉRENTS DEGRÉS DE LA CONNAISSANCE DU FUTUR

De même que les différents événements passés ne se présentent pas à notre mémoire avec la même précision, de même le futur ne s'offre pas à nous avec une netteté égale. On peut distinguer différents degrés dans la conscience qu'on en a, soit, en allant du plus précis au plus flou :

1) La connaissance parfaite : C'est ce qui arrive quand on se sent capable de prédire avec exactitude les événements futurs susceptibles d'influer sur la décision à prendre. Il s'agit là évidemment d'un cas tout théorique, ne se présentant jamais à l'état pur; qui, en effet, peut être sûr du futur ? Un événement subit, une catastrophe imprévisible peuvent rapidement changer un cours que l'on croyait définitivement fixé.

Ce cas n'est pas, néanmoins, dénué de tout intérêt, car bien des situations en sont extrêmement proches. Nous agissons fort souvent comme si certains événements futurs étaient inéluctables; évidemment, ils ne le sont pas, rien n'est sûr, mais tout se passe dans notre esprit comme s'il en était ainsi, et, dans une certaine mesure, c'est cela qui est important.

2) Le risque : Les situations de risque sont celles où l'on ne sait pas lequel de plusieurs événements exclusifs se produira, mais où l'on peut affecter à chacun de ces événements une probabilité d'apparition bien définie.

La situation typique de risque est celle de la loterie; si elle comporte vingt numéros, je ne sais pas si le mien sortira, mais je peux affirmer, si la loterie est équitable, qu'il a une chance sur vingt de sortir et dix-neuf sur vingt de ne pas sortir.

Le risque est lui aussi une notion idéale, rarement susceptible d'être rencontré dans la réalité, car à part le cas précédent de la loterie, et quelques autres de même nature, on voit mal comment assigner des probabilités précises aux événements futurs. On peut par exemple juger qu'il est très probable qu'il fasse beau dans une heure, mais il est difficile de mesurer le degré de certitude de cette affirmation. La probabilité de beau temps est-elle 0,90 ou 0,95, ou un autre nombre ? La connaissance des lois météorologiques ne peut donner qu'une idée, un ordre de grandeur; néanmoins, on est souvent en possession d'un tel ordre de grandeur.

Ainsi, la probabilité d'une naissance masculine est d'après les statistiques démographiques de 0,511. De même, l'observation sur une longue période de temps des hauteurs de houle marine permet de définir la probabilité d'observer au cours d'une année une houle de 1,0 m; et on peut espérer que le développement des statistiques nous permettra de « probabiliser », au moins d'une manière approximative, un nombre de plus en plus grand de phénomènes.

3) L'incertitude : La 3e position possible vis-à-vis du futur est celle de l'incertitude, qui se produit quand on est capable d'énumérer les divers événements possibles, mais dans l'impossibilité complète de leur assigner des probabilités. Là, encore plus que précédemment, il s'agit d'une hypothèse d'école, et dans la vie courante, les cas où elle se présente à l'état pur doivent être rares. On a bien toujours sa petite idée sur ce qui pourra se produire, à moins de débarquer par hasard sur une autre planète, ou de se

réveiller d'une hibernation millénaire; et, en général, on se trouvera à mi-chemin entre le risque et l'incertitude. Mais, souvent, les vraisemblances qu'on peut attacher à tel ou tel événement sont très floues, et considérer alors la situation sous l'angle de l'incertitude peut être une sage précaution contre des conclusions rigides tirées de l'usage de probabilités trop imprécises.

Mais les cas d'incertitude pure sont certainement très rares et ceux de risque constituent également un extrême; la majorité des situations se situeront entre les deux : on ne peut pas vraiment assigner de probabilités précises, mais on n'est quand même pas totalement ignorant sur la vraisemblance de ce qui va se produire. On se trouvera en somme souvent dans un cas d'incertitude partielle.

Il n'est pas sans intérêt de remarquer que la distinction entre ces trois types de connaissance du futur, la connaissance parfaite, le risque et l'incertitude est souvent parallèle au degré d'éloignement du futur : en général, la connaissance parfaite s'appliquera au présent, au sens large du terme, c'est-à-dire au halo qui entoure le point de temps actuel, et au futur très proche; le risque se rencontrera pour des périodes plus éloignées; et l'incertitude sera la caractéristique des époques lointaines, avant lesquelles trop d'événements vont se produire, trop de bouleversements risquent d'intervenir, pour qu'on puisse avancer quoi que ce soit, même des degrés d'incertitude.

2 - LES OUTILS FOURNIS PAR LA THÉORIE DE LA DÉCISION

La théorie de la décision va maintenant fournir les éléments qui permettront de définir la meilleure conduite de l'homme rationnel dans chacun des cas précédents; nous les analyserons successivement dans deux hypothèses : la première est peu réaliste, mais constitue une étape nécessaire, c'est celle où la décision à prendre, l'action à effectuer forme un tout en elle-même et peut être dissociée de son contexte temporel; ceci nous permettra de passer ensuite au cas plus réel où elle s'insère dans une chaîne d'autres décisions s'engrenant l'une l'autre, et commandées chacune par les situations résultant des décisions précédentes.

1) Les décisions isolées

La situation qu'on examine ici est assez irréelle : elle revient à supposer qu'il y a une décision, une seule, à prendre maintenant; cette décision est donc en quelque sorte isolée de son contexte temporel; ses conséquences sont limitées dans le temps, et après elle, le monde s'arrête; ce qui se passe après ne nous intéresse plus; l'analyse est donc, sinon statique, tout au moins à une seule période.

Dans ce cas, les choses sont très simples si l'on a une connaissance parfaite du futur : à chacune des décisions de l'individu peut être attaché un gain

monétaire certain ou plus généralement une satisfaction certaine, et il y a lieu de s'arranger pour rendre maximum ce gain ou cette satisfaction; si x est la décision, la satisfaction qui s'y attache sera une fonction de x, $f(x)$, qu'il faut rendre maximum. Le problème mathématique est classique, sinon simple : on le résoud selon les cas par l'annulation de la dérivée, ou par d'autres techniques, telles que la programmation linéaire.

Dans les autres cas de risque ou d'incertitude, le résultat dépend non seulement de la décision prise mais aussi de celui des différents événements possibles qui se produira effectivement; c'est ainsi que le résultat, c'est-à-dire le gain monétaire, qu'on peut attendre d'un investissement ne dépend pas seulement de cet investissement mais également d'autres éléments à venir comme par exemple l'évolution des prix futurs, de la demande et du progrès technique; de même, le revenu d'un agriculteur dépend certes des efforts déployés pour la mise en valeur de la terre, mais aussi des conditions climatiques.

Dans toutes ces hypothèses, comment doit se comporter l'homme rationnel ? Il faut, pour répondre à cette question, distinguer différents cas suivant le degré de connaissance qu'il a des événements futurs qui vont déterminer le résultat final de la décision prise.

Plaçons-nous d'abord dans une situation de risque. Supposons qu'un individu, par exemple un chef d'entreprise, doit prendre l'une ou l'autre de deux décisions A : investir ou B : ne pas investir et que deux événements (et deux seulement) soient possibles quant à l'évolution ultérieure des prix des produits qu'il fabrique : soit les prix restent stables, et ce avec une probabilité mettons de 0,3, soit ils montent de 5 % avec une probabilité de 0,7. Ses gains seront différents dans l'un ou l'autre des quatre cas possibles (investir ou non, et prix stables ou non); l'entrepreneur les calcule et aboutit au tableau carré suivant :

	Evolution des prix :	
Décision :	Prix stable	Prix en hausse
Investir	— 500	1 000
Ne pas investir	0	0

Une première idée pour décider de l'opportunité de l'investissement, serait de comparer les gains probables moyens qu'il fera dans chacun des deux cas :

Investir	$-500 \times 0{,}3 + 1\,000 \times 0{,}7 = 550$
Ne pas investir	$0 \times 0{,}3 + 0 \times 0{,}7 = 0.$

La décision serait d'après ce critère qu'il faut investir puisque le gain probable dans ce cas est plus élevé que dans l'autre.

Mais, ce résultat doit être amendé : en effet, si l'entrepreneur investit comme le lui commanderait ce critère, il peut certes réaliser des gains impor-

tants, mais il risque aussi, avec une probabilité non nulle, d'enregistrer une perte : si sa trésorerie est habituellement difficile, si les bénéfices que le reste de son exploitation lui procurent ne peuvent compenser cette perte de 500, la faillite est à craindre; la conséquence de sa décision serait alors catastrophique et sans rapport avec le chiffre monétaire de — 500 inscrit dans le tableau carré à la case : « investissement - prix stable ».

Il est donc nécessaire d'améliorer le critère de choix proposé. On y arrive en substituant aux gains et pertes monétaires, des utilités, appréciations subjectives et propres au décideur, des avantages ou désavantages ressentis dans chacun des cas susceptibles de se produire.

Ainsi, pour reprendre le cas précédent, si l'industriel est un homme prudent, soucieux d'honnêteté et de bonne réputation, il considèrera la faillite comme une catastrophe et lui affectera une désutilité très forte de — 50 000 par exemple par rapport au gain, en cas de hausse des prix, dont l'utilité sera de 1 000, ou au statu quo d'utilité nulle. Alors le tableau carré précédent s'écrit :

	Prix stable	Prix en hausse
Investir	— 50 000	1 000
Ne pas investir	0	0

et le critère de l'espérance probable conduit aux utilités moyennes suivantes :

Investir $-50\,000 \times 0{,}3 + 1\,000 \times 0{,}7 = -14\,300$

Ne pas investir $0 \times 0{,}3 + 0 \times 0{,}7 = 0$

alors l'industriel n'investira pas.

Si au contraire, on se trouve en présence d'un entrepreneur attiré par l'apport du gain et disposant par ailleurs d'un bon crédit auprès des banques, la perspective d'une faillite le tourmentera peut-être moins, la désutilité qu'il lui accordera sera plus faible, de — 2 000 mettons, et le tableau carré deviendra alors :

	Prix stable	Prix en hausse
Investir	— 2 000	1 000
Ne pas investir	0	0

Les utilités moyennes seront pour chacune des décisions possibles :

Investir $-2\,000 \times 0{,}3 + 1\,000 \times 0{,}7 = 100$

Ne pas investir $0 \times 0{,}3 + 0 \times 0{,}7 = 0$

et c'est alors l'investissement qui sera décidé.

Quelques mots à propos de ces utilités; remarquons d'abord qu'elles n'ont pas d'unité de mesure. On pourrait toutes les multiplier par un même nombre positif sans que les résultats soient changés; on pourrait également leur ajouter à toutes une même constante : elles ne sont définies qu'à une transformation linéaire près.

On pourrait aussi émettre des doutes sur la possibilité pour un individu d'affecter des utilités à chacune des situations dans lesquelles il peut se trouver; dans ce cas, à quoi bon raisonner sur elles, si l'individu ne peut les fixer ? Certes, leur détermination doit demander dans la pratique une certaine dose d'introspection et il paraît diffficile de leur donner une valeur précise, mais Von Neumann et Morgenstein ont montré que des individus cohérents et logiques placés dans des situations de risques devraient nécessairement affecter à chaque situation possible une utilité et que le choix de leur action se faisait alors selon le critère de l'utilité moyenne maximum, précédemment décrit. Evidemment, dans ce résultat, tout est dans la définition de l'individu cohérent et logique, mais on peut dire que le comportement de Von Neumann et Morgenstein assignent à cet individu, s'il est probablement assez rare en pratique, n'a rien d'extravagant, et est très acceptable sur le plan logique; ce qu'on demande à une telle personne, c'est de satisfaire à des exigences telles que, par exemple, les deux suivantes :

— Si elle préfère l'état A à l'état B et l'état B à l'état C, alors elle préfère A à C.

— Si elle préfère A à la fois à B et à C, alors elle préfèrera avoir A plutôt que de participer à une loterie où l'on obtient soit B, soit C.

Tout ceci, on le voit, n'a rien que de très naturel, et fournit une solide justification au critère de l'utilité moyenne maximum dans le cadre d'une situation de risque.

Passons maintenant à un autre type de situation, celle de l'incertitude totale; on a vu précédemment qu'il n'était pas simple de trouver des exemples d'une telle situation. Ceci se traduit sur le plan de la formulation; on peut essayer de caractériser les situations d'incertitude totale par des axiomes des désiderata que doit satisfaire la décision à prendre; de nombreux systèmes d'axiomes ont été proposés par différents auteurs, mais le système le plus complet semble être celui de Milnor [1]. Or, ce dernier auteur montre qu'avec son système aucun critère de décision n'existe; et pourtant, chacun des axiomes qu'il pose est, pris isolément, tout à fait naturel et logique. Pour arriver à définir un critère de décision, il faut abandonner un ou plusieurs des axiomes précédents, et suivant qu'on abandonne l'un ou l'autre, on aboutit à des critères très différents.

[1] Voir à ce sujet, Luce et Raiffa : Games and decisions (1958) et G. Morlat : Un article de M. J.L. Milnor, Les jeux contre la nature, *Economie appliquée* (1960).

Ces résultats, sur lesquels nous ne nous étendrons pas davantage, montrent bien, semble-t-il, le caractère irréel et tout théorique des situations d'incertitude totale, puisque d'une part on a du mal à en donner des exemples concrets, et si, d'autre part, on cherche à formaliser les conditions de cette incertitude, on arrive à montrer qu'aucun critère de décision n'est acceptable. Mais si, par contre, on abandonne cette hypothèse d'école de l'incertitude parfaite, et que l'on se confine à l'ignorance partielle, c'est-à-dire qu'on ne fait pas d'hypothèse particulière sur le degré de connaissance du futur qu'a l'individu, on montre (Savage), à partir de postulats traduisant cet état de connaissance qui couvre en somme toutes les situations entre le risque et l'incertitude, que tout doit se passer comme si l'individu affectait à chacun des événements futurs une probabilité et une utilité et s'il choisissait la décision lui procurant l'utilité moyenne maximale.

Nous sommes donc ramenés à des conclusions analogues à celles obtenues dans le cas du risque, à la différence importante près qu'antérieurement les probabilités étaient objectives, c'est-à-dire indépendantes du sujet et s'imposaient à lui, alors que maintenant elles n'ont plus d'existence réelle; c'est le décideur qui doit les inventer, à partir de la connaissance intuitive qu'il a des faits à supputer. Certes, un grand pas est ainsi fait, mais tout n'est pas résolu pour autant : comment déterminer ces probabilités subjectives ? La théorie est muette sur ce point; comme le note P. Massé « elle fournit un cadre, mais ne dit pas comment le remplir ».

Jusqu'ici, nous nous sommes intéressés au cas où les événements inconnus à supputer étaient en quelque sorte indépendants du décideur, n'étaient pas dirigés contre lui ni en sa faveur. C'est ce que l'on appelle les « jeux contre la nature ».

Un autre cas spécialement étudié est celui où ces événements dépendent d'autres individus qui sont en conflits d'intérêt avec le premier. Ce sera par exemple la situation de deux entreprises en lutte pour la conquête d'un même marché : les résultats d'une action de la première sont sous la dépendance de ce que fera le 2e entreprise, qui précisément convoite la même zone d'influence.

Ce type de situation est l'objet de la théorie des jeux contre personnes; cette théorie considère des individus ayant à prendre des décisions; de chacune de leur décision et des décisions des autres joueurs, résulte pour chacun un avantage ou désavantage connu et la théorie s'efforce de définir comment chacun doit se décider pour retirer l'avantage maximum. Le cas le plus simple est celui où il y a deux « joueurs » et où, quelles que soient leurs décisions, les gains de l'un sont les pertes de l'autre; ce cas correspond aux jeux de somme nulle; mais elle analyse également d'autres possibilités, celle où, par exemple, dans chaque cas, les gains et pertes ne se compensent plus, mais peuvent laisser à l'ensemble des deux joueurs un bénéfice net, variable suivant les décisions; les joueurs ne sont plus alors uniquement

adversaires l'un de l'autre et peuvent alors avoir intérêt, si la règle le leur permet, à se concerter pour obtenir le bénéfice global maximum, quitte à se le partager ensuite suivant certaines règles : c'est ce que l'on appelle les jeux de somme non nulle, coopératifs ou non.

Enfin, la théorie se généralise par la prise en compte de plus de deux joueurs.

Il n'est pas sans intérêt de remarquer que dans bien des cas, les décisions auxquelles doivent aboutir les joueurs sont d'un type analogue à celles que fournirait la théorie de la décision contre la nature. Prenons, par exemple, le cas d'un jeu à deux personnes de somme nulle où les gains du joueur 1 sont en fonction des décisions des deux joueurs, les suivants :

Décision du joueur 1 \ Décision du joueur 2	b_1	b_2
a_1	0	+ 1
a_2	+ 1	0

Ceux du joueur 2 étant dans chaque cas opposés, puisque le jeu est de somme nulle.

Apparemment, chacun d'eux n'a que deux décisions possibles; en fait, ils en ont une infinité; pour 1, par exemple, toutes celles qui consistent à laisser le hasard décider entre a_1, avec une certaine probabilité p_1, et a_2 avec la probabilité $1 - p_1$. Il s'agira là d'une ruse; le joueur 2 sera bien incapable de prévoir le choix de 1 puisque celui-ci, le remettant au hasard, ne le connaît pas lui-même.

De même, pour le joueur 2, différentes stratégies s'obtiendront en affectant des probabilités diverses p_2 à la décision b_1, et $(1 - p_2)$ à la décision b_2. Remarquons que ce type de stratégies, appelées « stratégies mixtes », n'avait pas d'objet dans les jeux contre la nature, qui est en effet neutre et insensible à toute ruse.

Ceci posé, mettons-nous à la place du joueur 1, en supposant momentanément que nous jouons contre la nature, dans une situation de risque où l'événement b_1 a une probabilité p_2 d'arriver, b_2 ayant une probabilité $1 - p_2$.

Nous devrons alors prendre la décision qui maximise le gain probable pour la valeur considérée de p_2; ce gain sera :

$$\text{Max}\,(0 \times p_2 + 1 \times (1 - p_2),\ 1 \times p_2 + 0\,(1 - p_2))$$

soit

$$\text{Max}\ (1 - p_2, p_2).$$

Maintenant, sachant que la « nature est méchante », puisqu'elle représente en fait un individu concurrent, le 1er joueur doit penser que logiquement celle-ci cherchera à rendre ce gain minimum. Celui-ci sera donc :

$$\underset{p_2}{\text{Min}}\ \ \text{Max}\ (1 - p_2, p_2)$$

Il a pour valeur 0,5 et est obtenu pour $p_2 = 0{,}5$.

Le même raisonnement appliqué à l'autre joueur montrerait que nécessairement $p_1 = 0{,}5$ et cela définit les stratégies des deux joueurs (1).

On voit donc que les stratégies à adopter peuvent s'obtenir en considérant que chaque joueur a affaire, dans une situation de risque, à une nature « mal intentionnée ». On définit dans les deux cas la meilleure solution en comparant des espérances mathématiques de gain.

Si le tableau des gains et pertes avait été différent, on aurait pu se trouver dans une situation analogue à celle de la connaissance parfaite.

Considérons, par exemple, le tableau de gains suivant pour le joueur 1 :

Décision du joueur 1 \ Décision du joueur 2	b_1	b_2
a_1	0	— 1
a_2	+ 1	0

Ceux du joueur 2 étant toujours opposés, puisque le jeu est de somme nulle.

Si le joueur 2 joue b_2, le gain du joueur 1 sera, quel que soit son choix entre a_1 et a_2, moindre que si le joueur 2 avait choisi b_1. Le 1er joueur a donc intérêt à forcer le 2e à jouer b_1; ce qu'il peut faire en jouant lui-même a_1; un raisonnement analogue fait par le 2e joueur montrerait que celui-ci a intérêt à jouer b_1 pour forcer l'autre à a_1.

(1) La construction n'est pas tout à fait complète; il faudrait prouver que les deux démarches exposées ici indépendamment l'une de l'autre, aboutissent au même résultat quand on les rassemble en un seul processus; ce serait l'objet du théorème Minimax.

Ainsi, dans ce cas précis, chacun des adversaires sait, avant de jouer, ce que l'autre fera s'il est logique, et connaît son gain. Ce cas est l'équivalent de la situation de connaissance parfaite dans le cas des jeux entre la nature.

Les autres situations sur lesquelles se penche la théorie des jeux : jeux de somme non nulle, jeux à plus de deux personnes, conduisent à des développements moins simples, mais on y retrouve souvent cette caractéristique que les actions des joueurs se déroulent soit comme s'ils connaissaient parfaitement le futur, soit comme s'ils se trouvaient dans une situation de risque.

Ce dernier résultat a donc un certain degré de généralité dont nous nous contenterons ici, car il n'est pas question de rendre compte de l'ensemble de la théorie des jeux.

Mais il ne constitue qu'un pas, car il se confine au cas d'une décision isolée, ou à celui de décisions répétitives, mais indépendantes entre elles. En réalité, ce qui est fait aujourd'hui aura une influence sur ce que serade main et ne sera pas sans lien avec ce que l'on veut que soit ce demain. Nos actes et leurs conséquences sont liés dans le temps. Après avoir examiné les décisions isolées, il faut donc maintenant voir les problèmes que pose leur insertion dans une chaîne temporelle.

2) L'enchaînement des décisions dans le temps

En fait, les décisions qu'on a à prendre ne se présentent pas de manière isolée; le monde ne se termine pas après que leurs conséquences immédiates ne soient révélées; mais on aura ensuite à prendre d'autres décisions, et l'enchaînement peut être décrit de la manière suivante : à partir d'une certaine situation initiale, la conjonction d'une décision et d'événements extérieurs, conduit à une nouvelle situation; cette situation constitue une charnière entre l'étape ancienne dont elle est un aboutissement plus ou moins favorable en soi au décideur, et la nouvelle étape pour laquelle elle sert de point de départ : une autre décision est à prendre, qui, combinée à une 2e série d'événements extérieurs, conduit à une 3e situation qui est une nouvelle charnière, etc.

Alors, chaque décision n'a pas pour seul effet de procurer un avantage immédiat; mais dans la mesure où elle contribue à façonner la situation dans laquelle on se trouvera sous peu, elle influe également sur les avantages futurs. On ne peut donc la choisir uniquement au vu de ses premiers résultats; il faudra également prendre en compte les étapes ultérieures qui dépendent du contexte auquel conduit cette première décision et considérer l'ensemble de la chaîne :

Evénements extérieurs 1 ↘ Evénements extérieurs 2 ↘

décision 1 ⟶ situation 1 → décision 2 ⟶ situation 2...

et déterminer l'ensemble des décisions de chaque étape qui donne le résultat global le plus favorable; on aura ainsi du même coup fixé la 1re décision.

A ce stade, un premier problème se pose : qu'est ce que « le résultat global le plus favorable » ?

En effet, on doit alors comparer, non plus différentes situations à un même instant, ce qui, on l'a vu, peut se faire par l'intermédiaire des utilités subjectives ou des gains monétaires, mais différentes chaînes temporelles de situations; à chacune des situations de la chaîne peut être attachée une utilité ou un gain monétaire, mais comment comparer deux chaînes différentes ? Un consommateur peut gérer son avoir de bien des manières; il peut, en particulier, le consommer immédiatement dans sa totalité, auquel cas il en retirera une grande satisfaction immédiate, et aucune satisfaction future; il peut, au contraire, tout garder pour le futur, auquel cas sa satisfaction actuelle sera nulle; enfin, il peut choisir une voie intermédiaire dans laquelle, ne consommant qu'une partie de son avoir, il en retire pour le présent comme pour le futur, une satisfaction moyenne; comment comparer ces chaînes d'utilité ou de gains monétaires : un bien ou une somme d'argent à un instant donné n'est pas directement comparable au même bien ou à la même somme à un autre instant : il s'agit en fait de choses économiquement différentes.

On y arrive par le concept d'actualisation; si on offre à une personne le choix entre 1 F cette année et $1 + i$ francs l'année prochaine, il est très probable que si i est nul, l'individu préfèrera avoir 1 F cette année; si par contre i est très élevé, il préfèrera avoir $1 + i$ francs l'année prochaine et on sent qu'il y aura une valeur de i telle qu'il sera dans l'indifférence entre les deux options. Cette valeur de i sera son taux d'actualisation : une situation représentant une utilité de 1 cette année lui sera équivalente à une autre situation lui procurant une utilité de $(1 + i)$ l'année prochaine ou une utilité de $(i + i)^2$ dans deux ans, etc.

Cette notion de taux d'actualisation permet aisément de comparer deux chaînes temporelles de situations. Supposons que la première conduise aux utilités successives $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$ et la deuxième à : $b_0, b_1, b_2, \ldots b_n, \ldots$ la première est équivalente à une utilité concentrée à l'époque actuelle de :

$$a_0 + \frac{a_1}{1 + i} + \frac{a_2}{(1 + i)^2} + \ldots + \frac{a_n}{(1 + i)^n} + \ldots = A \; ;$$

la deuxième est équivalente à :

$$B = b_0 + \frac{b_1}{1 + i} + \frac{b_2}{(1 + i)^2} + \ldots + \frac{b_n}{(1 + i)^n} + \ldots$$

La première succession sera préférable à la deuxième si $A > B$, lui sera équivalente si $A = B$ est inférieure si $A < B$.

Ce concept de taux d'actualisation qui joue un si grand rôle dans les décisions séquentielles n'est pas sans lien avec le taux d'intérêt monétaire classique : on montre qu'à l'équilibre, dans un marché parfait, où tous les

agents ont effectué librement leurs arbitrages intertemporels, les deux taux sont égaux.

Nous sommes maintenant en mesure de comparer deux chaînes de décisions en classant l'utilité actualisée qu'elles procurent. A ce stade, pour déterminer la meilleure chaîne, on est apparemment ramené à un problème simple d'énumération : recenser toutes les chaînes de décisions possibles, déterminer pour chacune l'utilité actualisée qu'elle procure, et choisir celle à laquelle est attachée l'utilité actualisée maximale. Mais cette solution est toute théorique : si à chaque étape on a le choix entre 10 décisions, la prise en compte de 20 étapes conduit à :

$$10^{20} = 1\ 00\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000$$

chaînes de 20 termes chacunes; le nombre d'opérations à effectuer défie les possibilités de l'homme et même des machines les plus perfectionnées. En outre, nous avons supposé là, qu'à chaque décision correspond une situation bien définie, c'est-à-dire que les événements futurs étaient parfaitement connus; or, la plupart du temps, il n'en sera rien; le futur n'est connu au maximum qu'en probabilités. Certes, cela n'introduit pas de grosses difficultés théoriques supplémentaires; on a vu, dans le cadre de l'analyse à une seule étape, qu'à l'utilité certaine qui résulterait d'une situation de connaissance parfaite, il suffirait, dans le cas de risque ou d'incertitude totale, de substituer l'utilité moyenne, espérance mathématique des utilités des divers événements possibles; on peut alors raisonner sur cette utilité moyenne comme antérieurement sur l'utilité certaine. Mais tout cela n'est pas fait pour raccourcir les opérations éventuelles de dénombrement et rend encore plus nécessaire l'élaboration d'une méthode permettant de les alléger pour les ramener à des proportions raisonnables. Cette méthode tire son existence du principe d'optimalité. Dû à P. Massé [1] et développé notamment par R. Bellmann [1], dans le cadre de la programmation dynamique, ce principe est d'une grande simplicité.

Supposons que soit prise la décision de la première étape : celle-ci procure une utilité (une utilité moyenne dans le cas de connaissance imparfaite du futur) immédiate u_1 et me place dans une certaine situation; si à partir de cette nouvelle situation j'agis au mieux, j'obtiendrai, pour toutes les périodes futures, une utilité u'_1 et l'utilité totale que je retirerai de ma décision initiale sera :

$$U = u_1 + u'_1.$$

Le principe d'optimalité dit alors que la meilleure première décision est celle qui rend maximum U. Il s'agit là d'une évidence et apparemment nous ne sommes pas plus avancés puisque si nous pouvons calculer l'utilité immé-

[1] P. Massé : Le choix des investissements.
R. Bellmann et Dreyfus : La programmation dynamique et ses applications.

diate u_1, attachée à chacune des premières décisions possibles, nous sommes, des chaînes de décisions partant de la 2e étape ; et même il nous faudra par contre, ignorants de l'utilité globale u'_1 qui correspond à la meilleure calculer, non pas une seule quantité u'_1 mais autant de quantités u'_1 qu'il y a d'état final possible pour la première étape.

Pour saisir le parti qu'on peut néanmoins tirer de ce principe, examinons un cas particulier; ce sera celui où la chaîne des décisions à prendre est finie et ne comporte que n étapes; à la fin de la dernière étape, différentes situations sont possibles : supposons qu'elles puissent être représentées par une variable continue s_n, à chacune d'elle est associée une utilité globale $f(s_n)$. Lors de l'avant-dernière étape, diverses situations sont possibles, soient s_{n-1} ces situations conduisant chacune à des situations s_n à la fin de cette étape et le passage de s_{n-1} à s_n procure une utilité immédiate

$$g(s_{n-1}, s_n).$$

Appliquons alors le principe d'optimalité en nous plaçant, non pas à la première étape, mais à l'avant-dernière. Nous ne savons pas encore auquel des états s_{n-1} nous nous trouverons au début de cette étape mais si nous sommes en l'un d'entre eux, nous pouvons facilement définir la politique optimale à suivre; ce sera, d'après le principe d'optimalité celle qui aboutira à la situation s_n rendant maximale la quantité :

$$h_{s_{n-1}}(s_n) = g(s_{n-1}, s_n) + \frac{f(s_n)}{1+i}$$

parmi tous les états s_n susceptibles d'être atteints à partir de l'état s_{n-1} pris comme base.

Nous pouvons donc en quelque sorte supprimer la dernière étape : nous savons dans chaque situation s_{n-1} possible à la fin de l'avant-dernière phase ce que nous y déciderons, et l'utilité globale ultérieure que nous en retirerons. On est donc ramené au problème précédent, mais avec une étape de moins : $n - 1$ au lieu de n; on peut ainsi remonter le temps et on arrivera finalement à ce qu'il ne reste plus qu'une étape; la méthode permettra alors de définir la première décision à prendre et le problème sera donc résolu; il est facile de voir que, s'il conduit encore à un dénombrement, celui-ci est beaucoup moins important qu'initialement, ainsi dans le cas de 10 états et 10 décisions possibles à chacune des 20 étapes, il n'y aura au maximum que $100 \times 20 = 2\,000$ cheminements à considérer au lieu de 10^{20}.

Enfin, il est possible de s'affranchir de la restriction importante que constitue le caractère fini de l'horizon, et la connaissance des utilités globales attachées à la dernière étape. On démontre d'abord que dans bien des cas, si l'époque finale est assez lointaine, les premières décisions sont peu influencées par les situations finales. Ceci peut d'ailleurs paraître assez normal puisque les utilités pour la dernière époque sont fortement affaiblies

par l'actualisation qui les divise par $(1 + i)^n$: pour $i = 7\ \%$ et $n = 50$ $(1 + i)^n = 32$; l'influence de ce qui se passera dans 50 ans est divisée par plus de 30. On peut ensuite prouver que si la chaîne de décisions est illimitée, on a une bonne approximation des premières décisions en coupant cette chaîne illimitée à une période suffisamment lointaine T et en affectant à chacun des états auquel on est susceptible d'arriver en T une utilité arbitraire; on appliquera alors à la chaîne finie obtenue la méthode précédente.

On voit ainsi se dégager en quelque sorte la philosophie du principe d'optimalité : c'est le futur proche moyennement éloigné qui doit guider dans les décisions immédiates, qui ne dépendent que de lui et de la situation présente. Si le futur très lointain ne joue que peu de rôle, le passé n'en joue pas non plus. Cela rejoint tout à fait le sens commun : ma décision d'acheter tel ou tel équipement électroménager est influencée par ma situation actuelle et par les perspectives de sortie prochaine d'appareils plus perfectionnés, mais elle ne prend pas en compte les bouleversements techniques susceptibles de se produire dans une dizaine d'années ou plus.

Nous avons ainsi mis en place les différents éléments permettant d'étudier les mécanismes de prise de décisions dans le temps; il reste à voir comment ces éléments ont été utilisés dans l'analyse économique.

3 - L'APPLICATION DES OUTILS DE LA THÉORIE DE LA DÉCISION A L'ANALYSE ÉCONOMIQUE

Tous les outils qui viennent d'être décrits ont été fréquemment utilisés en économie. On sait par exemple ce que la théorie des jeux a apporté à la connaissance des situations de concurrence entre vendeurs, notamment sur les concurrences monopolistiques; mais il s'agit là d'analyses à caractère statique; des applications plus interessantes pour notre propos sont celles qui ont trait aux modèles de croissance et aux principes de choix d'investissements. Dans un premier paragraphe on exposera, sans démonstration, un ensemble de résultats généraux classiques relatifs aux modèles de croissance multisectoriels; un deuxième paragraphe sera consacré à la présentation d'un modèle de croissance à un seul secteur, qui est suffisamment simple pour que ses propriétés puissent faire l'objet de démonstrations rapides. Enfin un troisième paragraphe sera l'objet d'une analyse succincte des méthodes de choix d'investissements routiers.

1) Les modèles de croissance multisectoriels

On connaît les hypothèses théoriques qui sont à la base de ces modèles. Le monde économique y est, en général, envisagé sous son seul aspect de production et les technologies sont du type linéaire introduit par Léontieff; c'est ainsi que pour fabriquer par exemple une tonne d'acier, il faut une

tonne de fonte, 0,2 tonne de charbon et deux heures de travail; si l'on ne dispose que de 0,5 tonne de fonte, mais si l'on a par ailleurs autant de charbon qu'on le veut, et qu'on peut embaucher aussi facilement qu'on le désire, on ne pourra obtenir que 0,5 tonne d'acier; l'hypothèse de technologie linéaire paraît évidemment très rigide, mais on est en droit de penser que la réalité en est assez proche. Si, pour fabriquer une bouteille d'un certain type il faut 200 g de verre, on pourra peut-être en fabriquer une moins solide avec 180 g ou une plus résistante avec 220 g, mais 100 g de verre seront certainement insuffisants et 500 g ne serviraient à rien. Notons en plus qu'il n'est pas impossible de prendre en compte différentes technologies linéaires pour obtenir le même bien, ce qui redonne au modèle la souplesse qui lui manquait. Ainsi, pour avoir de l'acier, à côté de la technologie précédente, il peut en exister une autre, utilisant une tonne de fonte, 0,1 tonne de charbon et 3 heures de travail pour une tonne d'acier.

Il n'est pas non plus aussi restrictif que cela peut paraître de ne considérer que l'aspect production de la vie économique. On peut en effet supposer que la consommation sert à entretenir la force de travail, comme le pensaient d'ailleurs les classiques anglais avec leur théorie du fond de salaire; dans cette optique, la consommation apparaît comme une activité de production particulière, celle qui produit le travail, de même que l'investissement produit le capital.

Sur ces bases, le problème qu'aura à résoudre la communauté ainsi caractérisée est le suivant : possédant initialement un certain stock, une certaine quantité, de chacun des biens existants, quelle politique doit-elle suivre en fonction du but qu'elle s'est fixée ? Ce but pourra être d'avoir, à une date future déterminée, une quantité donnée de chacun des biens sauf le dernier et pour ce dernier bien, la plus grande quantité possible; ou bien de rendre maximum le revenu national à prix constant; ou encore de produire le plus possible de chacun des biens, les rapports de quantité entre eux étant, fixés a priori.

Pour l'analyse, on découpe le temps en période. A chaque période des décisions de production doivent être prises; comment faut-il les agencer pour obtenir le résultat souhaité ?

Pour le voir d'une manière simple (1), considérons le cas où deux biens seulement existent dans l'économie; cela permettra des représentations graphiques avec en abscisse la quantité du bien A et en ordonnée la quantité du bien B. A partir d'un stock initial de chacun de ces biens, A_0 et B_0, l'ensemble des complexes de biens auxquels on peut aboutir à la fin de la première période est représenté sur le graphique ci-dessous (Courbe I de la figure 7-1).

(1) La présentation qui suit est inspirée de l'ouvrage de DORFMANN, SAMUELSON, SOLOW : Programmation linéaire et gestion économique (1963).

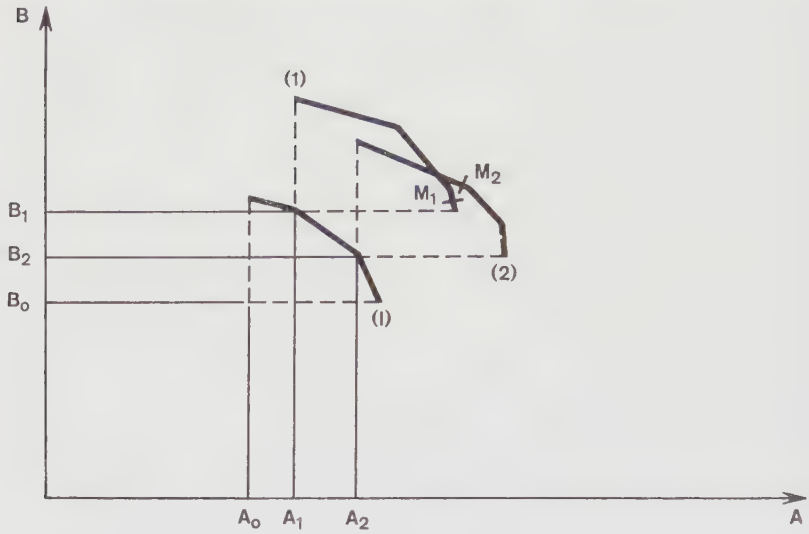

FIG. 7-1.

En raison de la linéarité des techniques, cet ensemble sera constitué par la juxtaposition de segments de droite; chaque point anguleux représentant l'usage d'une technique particulière, et les segments qui les relient, la combinaison, en proportion variable de deux (ou plus) de ces techniques. A partir de chacun des points auxquels on peut se trouver à la fin de la période 1, on peut déterminer également un ensemble de production possible pour la 2e période. Ainsi, si on se trouve en A_1 B_1 à la fin de la période 1, l'ensemble possible à la fin de la période 2 sera représenté par (1) et si on se trouve en A_2 B_2, l'ensemble possible une période plus tard sera (2). A partir de A_1 B_1 la courbe (1) définit les meilleures productions possibles en une période; mais, il n'en est pas de même si l'on part de A_0 B_0 et que l'on considère ensemble les deux périodes 1 et 2 : en effet, sur la figure, le point M_2 qui peut être atteint en deux périodes à partir de A_0 B_0 est préférable au point M_1, puisqu'il comporte à la fois plus de A et de B; mais pour l'atteindre, l'état intermédiaire à la fin de la première période n'est pas indifférent. On fera un mauvais calcul en le fixant à A_1 B_1 et il vaudra mieux dans cette étape intermédiaire aboutir à A_2 B_2; peut-être d'ailleurs y a-t-il un autre point possible à la fin de la première période qui permette ultérieurement dans la deuxième phase d'obtenir à la fois plus de A et de B que ce que représente le point M_2. Pour déterminer ce point optimum, ainsi que tous les autres optimums possibles, le processus est simple : considérons toutes les courbes du type des courbes (1) et (2) qui définissent les productions possibles en 2e période à partir d'une production possible à la fin de la première

période et gardons la frontière la plus haute et la plus à droite de ces courbes; on obtient ainsi un ensemble (II) (fig. 7-2) qui définit ce que l'on peut faire de mieux en deux périodes à partir des quantités initiales A_0 et B_0. C'est à un des points de cette courbe II qu'il faudra arriver. Mais, si on se fixe le point de cette courbe, par exemple N_2, l'action à mener au cours de la première période est, par là même, imposée : il faudra aboutir en N_1; si on arrivait en N'_1 on ne pourrait plus obtenir N_2 à la deuxième période.

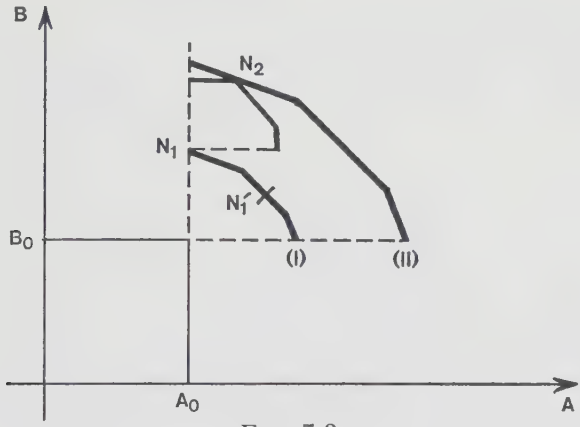

FIG. 7-2.

On peut recommencer le raisonnement à partir de la fin de la période 2. A partir de chacun des points de la courbe II, qui sont optimaux à la fin de la période 2, on peut obtenir au cours de la 3e période différents ensembles de production, mais ceux-ci ne constituent pas tous un optimum par rapport à la situation initiale; seuls le sont ceux qui ne sont pas dominés par une autre courbe de production possible obtenue pour cette troisième période à partir d'un des points de la courbe II. On peut ainsi, en ne gardant que les états non dominés, obtenir une courbe III représentant ce que l'on peut faire de mieux en trois périodes à partir de la dotation initiale A_0 B_0. Mais, de même que précédemment, si on se fixe l'état auquel on veut parvenir sur cette courbe III, les états intermédiaires sont automatiquement fixés : on ne peut pas faire ce que l'on veut au cours des périodes 1 et 2, mais l'objectif final à atteindre détermine les étapes intermédiaires pour lesquelles il faut passer et en particulier la première décision à prendre, celle relative à la période 1. Tout ceci se généralise sans peine au cas de plus de trois périodes; on aurait alors des courbes IV, V, ... représentant chacune ce qu'on peut faire de mieux à la 4e, la 5e période.

On retrouve ainsi l'esprit du principe d'optimalité selon lequel les décisions immédiates sont sous la dépendance de la situation présente et de l'objectif futur à atteindre.

On voit également se dégager la notion de cheminement optimum : pour aboutir à un état optimum à la dernière période, les étapes intermédiaires sont fixées et déterminent en quelque sorte un chemin que devra suivre l'économie en question pour réaliser le but qu'elle s'est fixée.

La considération des courbes numérotées en chiffres romains qui délimitent l'ensemble des situations optimales de chaque période permet de résoudre les questions qu'on se posait initialement.

Si, par exemple, on veut avoir, à la fin de la troisième période, une quantité fixée a du bien A et le plus possible de bien B, on voit sur le graphique ci-dessous (fig. 7-3), que le mieux qu'on puisse faire est d'obtenir la quantité b de B et connaissant ainsi la situation finale, on peut en déduire le cheminement pour y parvenir.

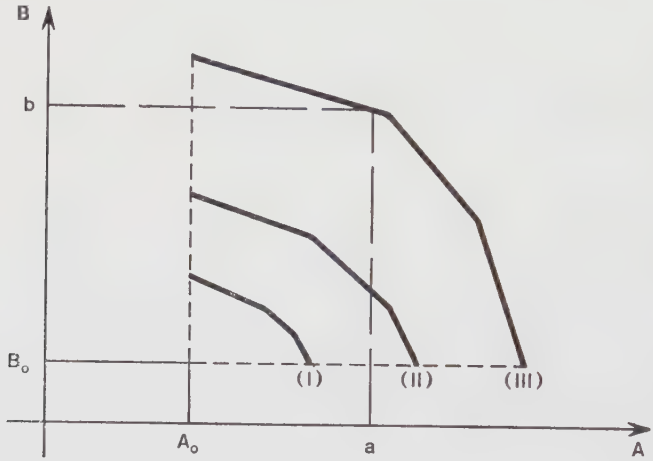

FIG. 7-3.

Si, au contraire, on veut, à la fin de la troisième période, obtenir le plus possible de A et de B, les quantités de chacun de ces deux étant dans un rapport donné x, on construira sur le graphique précédent la droite de pente x. Son intersection avec la courbe III donnera l'état final auquel on peut prétendre et on peut aussi déterminer le cheminement à suivre pour y parvenir.

Si maintenant on considère tous les cheminements optimaux à partir d'une situation initiale $A_0\ B_0$ particulière, on sent bien qu'il n'y a pas de raison pour qu'il y en ait un qui corresponde à une croissance régulière à un taux constant de la quantité de chacun des biens A et B; ce cheminement, représentatif d'une croissance équilibrée, serait figuré par une droite, et les points correspondant aux états atteints au cours des différentes étapes se situeraient sur cette droite selon une progression géométrique

(fig. 7.4). Ce serait vraiment un hasard qu'à partir de n'importe quelle situation initiale, un tel cheminement optimum soit possible.

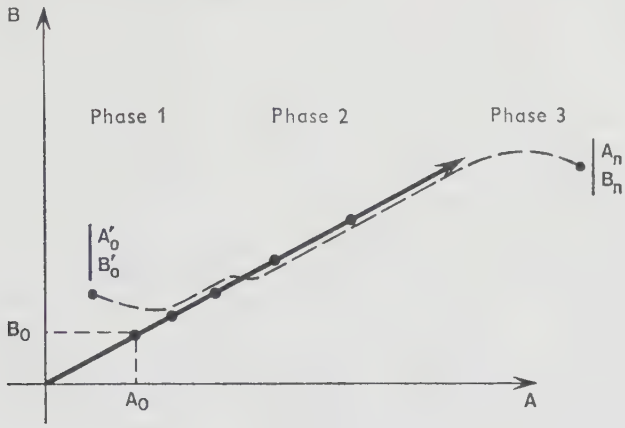

FIG. 7-4.

On peut effectivement montrer que ceci ne peut se produire qu'à partir d'une situation initiale $A_0\ B_0$ bien particulière, dépendant uniquement de l'état de la technique, et que ce cheminement optimum correspond à la croissance équilibrée qu'a mise en évidence Von Neumann; cette croissance équilibrée est compatible avec une organisation des marchés selon la concurrence parfaite, dans laquelle les prix et le taux de l'intérêt se formeraient librement par confrontation de l'offre et de la demande; dans ce schéma il y aurait égalité entre le taux de l'intérêt et le taux de croissance, qui serait alors le plus fort de ceux qui sont technologiquement possibles.

On a donc en quelque sorte parmi tous les cheminements optimaux possibles, un cheminement privilégié qu'on ne peut obtenir qu'à partir d'un rapport bien défini entre les quantités initiales disponibles; ce cheminement correspond à un taux de croissance constant, et ce taux est un taux maximum : d'autres cheminements à taux constants sont possibles, mais ils ne sont pas optimaux, et correspondent à un taux plus faible.

Un ensemble de résultats tout à fait remarquables relie ce cheminement aux autres cheminements optimaux qu'il faut suivre pour atteindre des objectifs très éloignés dans le temps à partir d'une situation initiale. Supposons par exemple qu'on veuille, en partant d'un état initial $A'_0\ B'_0$ (fig. 7-4), atteindre au bout d'un temps très long de n périodes, l'état $A_n\ B_n$ situé sur la courbe optimale relative à l'époque n; on montre que le cheminement optimum pour cela sera constitué de la manière suivante : à partir de $A'_0\ B'_0$, on commencera (phase 1) par se rapprocher du cheminement de Von Neumann, puis, pour la plus grande partie du temps, l'économie devra évoluer d'une manière très voisine de celle décrite par Von Neumann (phase 2)

et ce n'est qu'en fin de parcours, si l'on peut dire, qu'elle quittera ce cheminement pour rejoindre l'objectif final (phase 3).

Ce type de trajet peut être comparé, d'une manière suggestive, à celui d'un automobiliste ayant à relier deux villes très éloignées : au lieu d'emprunter des petites routes secondaires qui sont toutes dans la direction qu'il veut atteindre mais sur lesquelles il ne pourra pas rouler très vite, il préfèrera rejoindre, au besoin en tournant d'abord le dos à sa destination finale, l'autoroute la plus proche qui lui permettra d'avancer à vive allure sur la majeure partie de son parcours; il quittera ensuite l'autoroute à la sortie la plus proche du but de son voyage. Ceci explique le nom donné aux théorèmes démontrant le fait : théorèmes de l'autoroute. Ceux-ci privilégient donc d'une façon toute particulière la croissance selon le schéma de Von Neumann puisque c'est celle-là qu'il faudra suivre la majeure partie du temps.

Enfin, signalons que E. Malinvaud (1) a étendu et généralisé ces considérations dans deux directions différentes : d'abord en supposant que la technologie n'est pas forcément linéaire, mais simplement convexe, ensuite en examinant le cas d'un horizon infini.

Les conclusions intéressantes auxquelles il arrive demanderaient de trop longs développements pour être rapportées ici; indiquons simplement qu'elles jettent une lumière intéressante sur le taux d'intérêt et ses liens avec le taux de croissance, ainsi que sur le rôle des prix, qui tiennent alors une place assez semblable à celle qu'ils ont dans la théorie statique de l'optimum paretien.

2) Un modèle simple de croissance à un seul secteur

Les modèles multisectoriels sont d'un maniement lourd et obligent à des raisonnements et des démonstrations assez complexes. Aussi, bien souvent, les économistes ont-ils fait porter leurs réflexions sur le cas, particulièrement simple, où il n'y a qu'un seul bien, qui peut être utilisé soit en tant que consommation finale, soit en tant que capital fixe de production. Les résultats auxquels on arrive alors peuvent d'ailleurs être interprétés en termes de comptabilité nationale; la production totale du bien unique de la théorie sera la production nationale et son utilisation alternative, représentera le partage de la production entre consommation et investissement.

Soit donc, pour chaque période t :

K_t = le stock du bien existant en début de période.

L_t = le montant de la force de travail qui sera disponible au cours de la période; L_t dépend de l'évolution démographique, et sera considéré comme une donnée exogène.

(1) E. Malinvaud : Capital accumulation and efficient allocation of resources, *Econometrica* (1953).

μ = le taux d'amortissement du capital, c'est-à-dire la proportion de capital qui sera détruite au cours du processus de période pendant la période.

$f(K, L, t)$ = la fonction de production de période t. Cette fonction de production change dans le temps en raison du progrès technique qui sera considéré comme une donnée exogène.

C_t = la consommation au cours de la période t.

i = le taux d'intérêt, qui traduit les préférences de la société en cause entre satisfaction présente et satisfaction future.

On supposera que la société étudiée cherche à rendre maximale la somme actualisée de ses consommations futures jusqu'à la période T, prise comme terme :

$$C_0 + \frac{C_1}{1+i} + \dots + \frac{C_T}{(1+i)^T}.$$

Cet objectif peut paraître simpliste, en particulier, on pourrait préférer substituer aux consommations C_t des quantités $U(C_t)$ représentatives de la satisfaction procurée par C_t et qui ne varie peut-être pas proportionnellement à C_t. Il présente néanmoins l'avantage de se prêter à des démonstrations simples sans pour autant être totalement invraisemblable. C'est au surplus le critère qui est effectivement utilisé pour les choix de la planification.

Quelle politique la société en cause doit-elle suivre pour atteindre le but ainsi défini ? et plus précisément comment doit-elle choisir la suite des investissements et des consommations au cours des différentes périodes (1) ? Pour le voir, utilisons le principe d'optimalité, et appelons $\varphi_t(K)$ le maximum des satisfactions futures actualisées, jusqu'à la période finale T, que permettrait la possession du capital K au début de la période t. Ce capital K assurera, au cours de la période t la production nette :

$$P_t = f(K, L, t) - \mu K,$$

cette production nette sera partagée entre investissement net :

$$I_t = K_{t+1} - K$$

et consommation :

$$C_t = P_t - I_t = f(K, L_t, t) - \mu K - (K_{t+1} - K)$$

$$C_t = f(K, L_t, t) + K(1 - \mu) - K_{t+1}. \tag{1}$$

(1) Le modèle proposé, et les résultats auxquels il conduit, sont assez classiques. Pour des hypothèses voisines de celles du texte on pourra se reporter à L. Stoleru : L'équilibre et la croissance économique et à D. Cass : Optimal growth in an aggregative model of capital accumulation, *Econometrica* (1967), ouvrages dans lesquels les modes de traitement mathématique sont toutefois assez différents de celui qui va être présenté ici.

Le principe d'optimalité permet de définir le choix optimal de C_t, qui d'après (1) se ramène au choix de K_{t+1} :

$$(2)\quad \varphi_t(K) = \underset{K_{t-1}}{\text{Max}} \left[f(K, L_t, t) + K(1-\mu) - K_{t+1} + \frac{1}{1+i}\varphi_{t+1}(K_{t+1}) \right]$$

Cette relation fondamentale va permettre de définir de proche en proche la série des K_t, et partant, d'après (1) celle des consommations C_t. Pour cela partons de la dernière période; on a alors :

$$\varphi_T(K) = f(K, L_T, T) + K(1-\mu)$$

puisque, comme après la période T il n'y a plus rien, il convient de ne rien laisser subsister, donc de consommer tout le capital restant [1].

Au cours de l'avant dernière période, on aura alors, d'après (2)

$$\varphi_{T+1}(K) = \underset{K_t}{\text{Max}} \left[f(K, L_{T-1}, T-1) + K(1-\mu) - K_T + \frac{1}{1+i} (f(K_T, L_T, T) + K_T(1-\mu) \right]$$

l'expression entre crochets sera stationnaire par rapport à K_t si :

$$-1 + \frac{1}{1+i}\left(\frac{\partial f}{\partial K_T} + (1-\mu)\right) = 0$$

soit :

$$\frac{\partial f(K, L_T, T)}{\partial K} = i + \mu.$$

Cette relation définit la valeur K_t de K.

On vérifie facilement que cet extremum est un maximum pourvu que la fonction de production soit à rendement décroissant [2].

La relation (3) défini K_T. Il en résulte que :

$\varphi_{T-1}(K) = f(K, L_{T-1}, T-1) + K(1-\mu) +$ constante ; en appliquant de nouveau la relation (2)

$$\varphi_{T-2}(K) = \underset{K_{t-1}}{\text{Max}} \left[(f(K, L_{T-2}, T-2) + K(1-\mu) - K_{T-1} + \frac{1}{1+i} (f(K_{T-1}, L_{T-1}, T-1) + K_{T-1}(1-\mu) \right]$$

[1] Ce qui est possible puisque le bien unique peut être indifféremment utilisé comme capital ou comme consommation.

[2] Ce qui s'exprime par les relations $\frac{\partial f}{\partial K} > 0 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial K^2} < 0.$

le maximum de l'expression entre crochets est encore obtenu pour :

$$\frac{\partial f(K, L_{T-1}, T-1)}{\partial K} = i + \mu$$

relation d'où l'on tire K_{T-1}.

On verrait ainsi de proche en proche par récurrence qu'à chaque période on doit avoir :

$$\frac{\partial f(K, L_T, T)}{\partial K} = i + \mu,$$

il y a ainsi T équations qui permettent de calculer chacun des K_t et déterminent donc sans ambiguïté la politique à suivre.

Arrêtons-nous un peu sur la relation qui vient d'être mise en évidence. Elle montre que la fomation de capital doit être poussée jusqu'à ce que la productivité marginale *brute* du capital soit $i + \mu$ c'est-à-dire, compte tenu de la signification de μ, jusqu'à ce que la productivité marginale *nette* soit i; on retrouve là un résultat très classique : il faut réaliser tous les investissements nets dont la productivité marginale dépasse le taux d'actualisation.

Mais la solution mise ainsi en évidence ne convient que dans des cas très particuliers : il faut d'abord que le capital initial K_0 vérifie, lui-même, cette relation

$$\frac{\partial f(K_0, L_0, 0)}{\partial K} = i + \mu;$$

il faut, en outre, que, quel que soit la croissance de K_t à K_{t+1} soit technologiquement possible, c'est-à-dire que :

$$f(K_t, L_t, t) - \mu K_t \geqslant K_{t+1}$$

ce qui n'est nullement assuré par les relations précédentes. Enfin, on peut par ailleurs s'intéresser à des programmes dans lesquels le capital, à la fin de la dernière période, n'est nul, mais prend une certaine valeur fixée à l'avance.

Dans tous ces cas, le raisonnement précédent n'est pas valable et doit être complété.

Pour voir ce qui se passe alors, envisageons d'abord le cas limité où seules trois périodes sont en jeu, les périodes $N - 1$, N, $N + 1$; supposons que la quantité de capital au début des périodes $N + 1$ et $N + 1$ soient fixées, aux valeurs K_{N-1} et K_{N+1}; et posons-nous le problème de la détermination de la valeur optimale de K_N.

Remarquons d'abord que K_N doit satisfaire les deux inégalités suivantes, qui expriment les limitations techniques à la croissance :

$$f(K_N, L_N, N) - \mu K_N \geqslant K_{N+1}$$

ce qui implique que K_N soit supérieur à une certaine quantité K_N^0

et $$K_N \leqslant f(K_{N-1}, L_{N-1}, N-1) - \mu K_{N-1}$$

soit $$K_N \leqslant K_N^1$$

finalement :

$$K_N^0 \leqslant K_N \leqslant K_N^1. \tag{4}$$

Si $K_N^0 > K_N^1$ on ne pourra pas trouver de valeur K_N satisfaisant (4); en d'autres termes, la croissance imposée est trop rapide, et se heurte à une impossibilité technique. Si, par contre, $K_N^0 \leqslant K_N^1$ la croissance imposée est techniquement possible : on peut choisir pour K_N n'importe quelle valeur entre K_N^0 et K_N^1; mais, parmi toutes ces valeurs matériellement possibles pour K_N, l'une d'entre elles est économiquement préférable : laquelle ? pour le voir, considérons la quantité $\varphi_{N-1}(K_{N-1})$ elle a pour expression, selon la relation (2) précédente

$$\underset{N-1}{\varphi}(K_{N-1}) = \underset{K}{\text{Max}} \left[f(K_{N-1}, L_{N-1}, N-1) + K_{N-1}(1-\mu) - K + \frac{1}{1+i}\varphi_N(K) \right]$$

de même

$$\varphi_N(K) = f(K, L_N, N) + K(1-\mu) - K_{N+1} + \frac{1}{1+i}\varphi_{N+1}(K_{N+1}).$$

Or, K_{N+1} est ici fixé. Donc $\varphi_N(K)$ est de la forme

$$\varphi_N(K) = f(K, L_N, N) + K(1-\mu) + \text{constante}.$$

Donc

$$\varphi_{N-1}(K_{N-1}) = \underset{K}{\text{Max}} \Big[f(K_{N-1}, L_{N-1}, N-1) + K_{N-1}(1-\mu) - K + \frac{1}{1+i}[(f(K, L_N, N) + K(1-\mu) + \text{constante})] \Big]$$

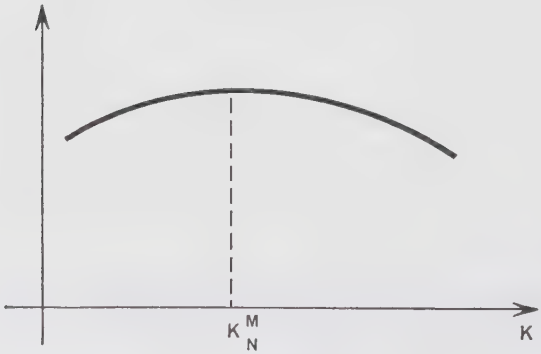

Fig. 7-5.

avec

$$K_N^0 \leqslant K \leqslant K_N^1; \tag{4}$$

la fonction entre crochets à rendre maximale présente l'allure suivante (fig. 7-5), avec un maximum pour une certaine valeur

$$K_N^M \quad \text{de} \quad K,$$

cette valeur K_N^M vérifiant l'égalité (3).

Selon les situations respectives de K_N^0, K_N^1 et K_N^M, le maximum K_N satisfaisant les inégalités (4) sera différent mais, comme le montre le graphique joint (fig. 7-6) la meilleure politique consiste à choisir K_N le plus près possible de K_N^M.

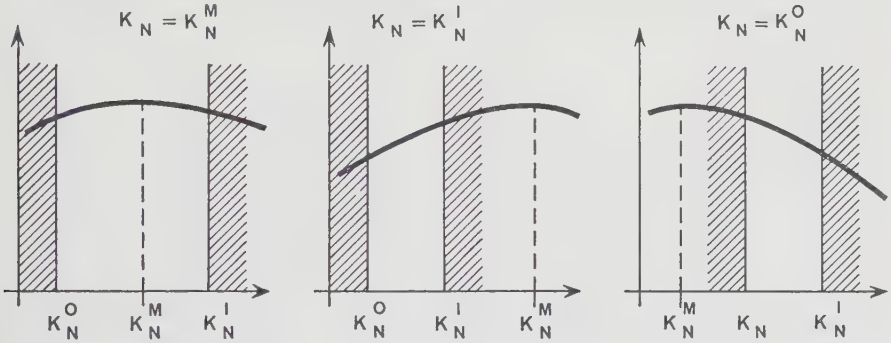

FIG. 7-6.

Ainsi, dans ce cas limité à 3 périodes où seule reste une latitude quant au choix de la politique de la période intermédiaire, il convient de se rapprocher le plus possible de — et éventuellement de retomber sur — la croissance privilégiée mise en évidence initialement.

Si maintenant on passe au cas plus général où il y a, non pas trois, mais un nombre quelconque de périodes en cause, et où sont fixés les stocks de la première période, et de la dernière période, c'est-à-dire en somme, le point de départ et le point d'arrivée, on verrait facilement par récurrence que la meilleure politique consiste encore à coller le plus possible au cheminement de croissance privilégié, c'est-à-dire à le rejoindre le plus rapidement possible et ensuite à le quitter le plus tard possible.

La situation est donc tout à fait analogue à celle qui avait été exposée au paragraphe précédent : l'économie en cause possède un cheminement privilégié qui présente certaines propriétés d'optimalité, mais qui correspond à une certaine dotation en capital bien défini à chaque époque. Une croissance le long de ce cheminement est d'ailleurs en quelque sorte exceptionnelle, car il sera rare que la dotation en capital initial soit précisément celle qui convient. Mais s'il existe un tel écart initial, il y aura intérêt à se rapprocher, le plus vite possible, du cheminement optimal, et à ne le quitter que le plus tard possible : on retrouve sur ce modèle simple un théorème d'autoroute analogue à celui qui avait été énoncé antérieurement.

Il est d'ailleurs possible d'obtenir des résultats plus précis en particularisant la fonction f, ce qui permettra de retrouver un certain nombre de résultats classiques de la théorie de la croissance.

Supposons que :

$$f(K, L, t) = K^a L^{1-a} e^{ct}$$

la production globale suit une loi de Cobb Douglas classique, le progrès technique induisant une croissance de la production au taux c; supposons, de plus, que la main-d'œuvre L croît régulièrement au taux de l, la fonction f s'écrit alors

$$f(K, L, t) = K^a e^{bt}$$

en posant

$$b = c + l(1 - a).$$

La condition d'optimalité $\dfrac{\partial f}{\partial K} = i + \mu$

est ici :

$$\frac{\partial f}{\partial K} = a \frac{f}{K} = i + \mu$$

soit

$$a f = (i + \mu) K;$$

on en déduit facilement, en remplaçant f par sa valeur dans cette dernière relation :

$$K(t) = \left(\frac{i + \mu}{a}\right)^{\frac{1}{a-1}} e^{\frac{b}{1-a} t}$$

et on verrait de même que la production et la consommation croissent au même taux

$$r = \frac{b}{1 - a}$$

$$(5) \quad \begin{cases} f = \left(\dfrac{i + \mu}{a}\right)^{\frac{a}{a-1}} e^{\frac{b}{1-a} t} \\ C = \left(\dfrac{i + \mu}{a}\right)^{\frac{1}{a-1}} e^{\frac{b}{1-a} t} \left[\dfrac{i + \mu}{a} + 1 - \mu - e^{\frac{b}{1-a}}\right] \end{cases}$$

Ainsi, dans la solution privilégiée, toutes les grandeurs économiques, production, capital, et consommation, croissent au même taux géométrique, de $r = \dfrac{b}{1 - a}$ par an.

Ce taux représente la propriété remarquable de ne dépendre du coefficient d'actualisation i; il peut encore s'écrire, compte tenu de l'expression de b :

$$r = \frac{c}{1 - a} + l.$$

Il serait nul, c'est-à-dire qu'on atteindrait un état stationnaire s'il n'y avait ni progrès technique ($c = 0$), ni croissance de la population ($l = 0$). En l'absence de progrès technique ($c = 0$), l'économie croîtrait au même taux que la population, c'est-à-dire que la consommation par tête serait constante. Enfin, la part de croissance due au progrès technique, $\frac{c}{1 - a}$ est d'autant plus forte que l'élasticité de la production par rapport au capital, représentée par a, est élevée.

Revenons sur l'influence du taux d'actualisation i; si ce dernier ne joue pas sur le taux de croissance de la consommation, il intervient par contre sur son niveau à un instant donné, comme le montrent les formules précédentes. On peut alors rechercher, dans le cadre d'une technique et d'une évolution démographique données, c'est-à-dire à taux de croissance donné, quel taux d'actualisation conduit au niveau de consommation le plus élevé. Mathématiquement, cela revient, dans la deuxième des relations (5) précédentes, à rechercher pour quelle valeur de i la fonction C est maximale, toutes les autres variables, et en particulier le temps t étant fixées. L'annulation de la dérivée correspondante, $\frac{\partial C}{\partial i}$, conduit à un maximum pour la valeur de i qui vérifie :

$$1 + i = e^{\frac{b}{1-a}} = e^{r}$$

soit

$$i = r.$$

On retrouve donc la condition que donnait le modèle de Von Neumann

« taux de l'intérêt = taux de croissance ».

En l'absence de progrès technique, on aura alors $i = l$

taux de l'intérêt = taux de croissance de la population.

Ce dernier cas permet de retrouver la « règle d'or » mise en évidence par Phelps [1], dans l'hypothèse où la fonction objectif se rapporte, non pas à la consommation totale, mais à la consommation par tête :

$$\varphi = \Sigma \frac{\frac{C(t)}{L(t)}}{(1 + \delta)^{t}}.$$

Dans le cadre du modèle ainsi défini, qui est légèrement différent de celui étudié, δ (qui remplace i) n'a plus alors tout à fait le sens d'un taux d'actualisation; on pourrait l'appeler, à la suite de P. Massé, le coefficient d'escompte

[1] Phelps : The golden rule for accumulation, *American Economic Review* (1961).

psychologique. Les résultats précédents montrent facilement que dans le cadre ainsi décrit, la valeur optimale du coefficient d'escompte psychologique δ est zéro; le niveau de la consommation est maximum quand la société attache un poids égal aux citoyens des diverses époques. Dans ce cas, à chaque époque le niveau du capital doit être poussé jusqu'à ce que

$$\frac{\partial f}{\partial K} = \mu.$$

En présence de progrès technique, le taux d'escompte psychologique δ doit avoir la valeur

$$\delta = \frac{b}{1 - a} = r$$

et le niveau du capital sera plus faible puisqu'il devra satisfaire :

$$\frac{\partial f}{\partial K} = \frac{b}{1 - a} + \mu > \mu.$$

On peut interpréter ces résultats en disant que le progrès technique futur conduit à mettre en œuvre à un instant donné moins de capital puisque la production supplémentaire future qu'aurait permis un surcroît d'investissement sera obtenue par l'effet du progrès technique.

Ainsi, d'après le modèle, l'investissement sera d'autant plus faible que le progrès technique sera plus rapide. Ceci semble aller à l'encontre de l'affirmation bien connue et vérifiée tous les jours selon laquelle le progrès technique favorise l'investissement en lui ouvrant de nouveaux champs d'application. Cette contradiction apparente se résout si l'on se rappelle que le modèle présenté a un caractère normatif, alors que son antithèse est plutôt une description du comportement réel des agents.

Il n'est pas sans intérêt de voir, dans le cas de la France, les ordres de grandeur auxquels conduisent les formules précédentes; nous prendrons les données suivantes, valables pour la période 1965-1970 du Ve Plan d'Equipement et de Productivité :

le coefficient d'actualisation i sera 0,07 (taux d'actualisation du Plan),
le taux de croissance annuel de la population, l, sera 0,01,
le taux de croissance du progrès technique, c, sera 0,03,
le coefficient a de la relation de Cobb Douglas sera 0,27,
le taux de dépréciation annuel du capital, μ, sera 0,045 (1).

On déduit de ces chiffres

$$\frac{f}{K} = \frac{i + \mu}{a} = \frac{0{,}115}{0{,}27}$$

(1) Ces renseignements sont tirés de C. Charmeil : Essai sur le rôle de l'investissement dans la croissance. Thèse, Paris (1967).

ou
$$\frac{K}{f} = 2{,}4$$

soit un coefficient moyen de capital de 2,5, valeur tout à fait conforme à celles qui sont admises habituellement.

Le taux de croissance optimal est

$$r = \frac{c}{1 - a} + 1 = 5{,}1\ \%,$$

alors que le Ve Plan prévoyait un taux de croissance de 5,2 % ; le taux d'intérêt qui assurerait le niveau de consommation le plus élevé aurait la valeur

$$i = r = 5{,}1\ \%,$$

il serait plus faible de deux points que le taux d'intérêt actuel; cet écart mesure le sous-investissement qui nous sépare de l'optimum.

Les données fournies par le modèle et les indications du Plan sont donc en excellent accord. Il semblerait que la croissance prévue par le Plan soit très proche du cheminement optimal à taux constant défini par le modèle, mais que toutefois le niveau de consommation actuel, correspondant à un taux d'intérêt de 7 %, reste en dessous du niveau de consommation maximal, qui correspondrait à un taux d'intérêt de 5,1 %; le rapport des consommations en question est, d'après la relation (5)

$$\frac{C_{\text{actuel}}}{C_{\text{optimal}}} = \left(\frac{i_a + \mu}{i_o + \mu}\right)^{\frac{1}{a-1}} \times \frac{\dfrac{i_a + \mu}{a} + 1 - \mu - r}{\dfrac{i_o + \mu}{a} + 1 - \mu - r}$$

avec
$$i_a = 7\ \%$$
$$i_o = 5{,}1\ \%$$

soit
$$\frac{C_{\text{actuel}}}{C_{\text{optimal}}} \simeq 0{,}9.$$

L'écart est, on le voit, assez faible; et pour le combler, il serait nécessaire d'investir initialement davantage, c'est-à-dire de sacrifier la consommation présente.

Ainsi, ces divers résultats permettent de retrouver assez correctement les choix du Ve Plan, ce qui semble indiquer que le modèle proposé n'est pas, en plus de son intérêt didactique, dénué d'intérêt pratique.

3) La théorie de la décision en économie appliquée : Le choix des investissements routiers

Les exemples qui précèdent avaient certes un aspect descriptif et explicatif intéressant; on ne peut s'empêcher toutefois de penser que leur principal intérêt est normatif : ils montrent comment l'individu doit agir pour rendre sa satisfaction globale maximale, comment la société doit organiser sa production pour atteindre au mieux les buts qu'elle s'est fixée.

Il n'y a donc pas à s'étonner de retrouver avec encore plus de force, l'intérêt des méthodes générales précédentes dans le calcul économique, où les buts normatifs sont avoués et pas seulement sous-entendus. Nous pensons ici aux problèmes que pose l'établissement des plans et en particulier de programmes d'investissements optimaux. Là on cherche volontairement la meilleure solution, on est prêt à faire des calculs complexes; si les méthodes précédentes pouvaient paraître bien sophistiquées, dans la mesure où elles supposaient, de la personne dont on cherchait à expliquer le comportement, des connaissances mathématiques poussées, il n'en est pas de même ici.

Une bonne illustration en est fournie par le choix des investissements routiers tel qu'il est pratiqué en France; nous nous fonderons, pour le présenter, sur deux articles récents de C. Bozon et C. Charmeil ([1]).

Dans les pays développés, les investissements routiers ne créent pas à proprement parler d'axes de transport nouveaux, ils viennent plutôt améliorer des liaisons existantes devenues insuffisantes en raison du développement du trafic et des exigences accrues des usagers de la route.

Ils occasionnent une dépense, principalement au moment de leur réalisation, et accessoirement durant leur service pour l'entretien, et procurent des avantages régulièrement étalés sur toute leur durée de vie, qu'on peut, dans la pratique, supposer infinie. C'est de la confrontation entre ces dépenses et ces avantages au sein d'une fonction d'utilité collective, que ressortira la rentabilité des opérations isolées et leur choix éventuel.

On peut classer les avantages selon différents critères par nature :

— Les économies de consommation d'essence et d'huile et d'usure des véhicules.

— Les gains de temps.

— Les avantages de confort.

— Les gains de sécurité décomposés suivant la gravité des accidents évités,

([1]) C. Bozon et C. Charmeil : L'instruction provisoire de la Direction des Routes sur l'exécution des calculs de rentabilité dans le cadre de la préparation du Ve Plan et La programmation des investissements routiers sur une liaison, *Revue Générale des Routes et des Aérodromes* (1966).

suivant la catégorie de véhicules intéressés :

— poids lourds,

— véhicules légers;

encore suivant le trafic :

— trafic, induit, suscité « ex nihilo » par l'ouvrage,

— trafic qui, même en l'absence du nouvel ouvrage, aurait effectué le parcours correspondant sur l'ancien itinéraire.

Des études de trafic déterminent l'importance du trafic induit et du trafic non induit, ainsi que leur évolution dans le temps et leur ventilation suivant la catégorie des véhicules intéressés. Ces éléments, liés aux caractéristiques techniques de l'ouvrage permettent de fixer en quantité :

— pour le trafic non induit : les économies de consommation d'essence, d'huile et d'usure des véhicules, les gains de temps et les avantages de confort et de sécurité que présentera le nouvel ouvrage par rapport à l'ancien;

— pour le trafic induit : les dépenses d'essence, d'huile et d'usure des véhicules ainsi que le temps et le nombre d'accidents auxquels correspondra le nouvel ouvrage.

Il reste à inclure ces éléments dans une fonction d'utilité collective. Pour cela, remarquons d'abord que, si ces éléments avaient tous un prix normal résultant du jeu d'un marché parfait, il ne serait pas nécessaire à proprement parler de spécifier cette fonction d'utilité collective. La théorie des surplus indique en effet que la variation d'utilité collective liée à une transformation marginale, c'est-à-dire faible, de l'économie, est égale à :

$$\mathrm{d}U = \Sigma\, p_i\, \mathrm{d}q_i$$

où p_i est le prix des biens intéressés et $\mathrm{d}q_i$ les variations, petites, de leurs quantités, comptées positivement pour les « outputs » et négativement pour les « inputs ».

Mais ici, les avantages des investissements routiers ne sont pas tous susceptibles d'appréciation sur un marché. Certes, il en est bien ainsi des dépenses d'essence et d'usure des véhicules, mais il n'existe pas de marché du temps où l'heure gagnée se verrait affectée un prix; cependant, pour ce dernier point, on pourrait rétorquer que le temps est quand même un bien auquel la notion de prix n'est pas étrangère : on pourrait, par des enquêtes par exemple, déterminer la somme moyenne que les individus sont prêts à dépenser pour économiser une heure de leur temps. Mais il n'en est pas de même pour l'amélioration de la sécurité; la question « combien un individu est-il disposé à payer pour ne pas mourir ? » n'a aucun sens et les gains de cet ordre ne sont pas susceptibles d'appréciation personnelle, mais collective, comme l'ont bien fait ressortir C. Abraham et J. Thedié [1]. On ne peut pas

[1] C. Abraham et J. Thédié : Le prix d'une vie humaine dans les décisions économiques, *Revue Française de Recherche opérationnelle* (1960).

toutefois ne pas tenir compte de ce facteur dans le choix des projets. C'est pourquoi il a été nécessaire de se fixer une fonction d'utilité faisant intervenir, à côté de la satisfaction individuelle de chaque citoyen, un terme représentatif d'une satisfaction collective et la formule générale précédente $\Sigma\, p_i\, dq_i$ se trouve amendée par l'adjonction de termes $\Sigma\, p'_i\, dq'i$; $d'q_i$ représentant la variation quantitative des facteurs auxquels la collectivité est sensible et p'_i la pondération (analogue à un prix) de chacun de ces facteurs pour la collectivité.

Soit $A\,(t)$ l'avantage qu'on en retira l'année t; $A\,(t)$ se décompose en :

— avantages individuels procurés au trafic non induit ; soit, $T_{ni}\,(t)$ mesurant ce trafic à l'année t :

$$T_{ni}\,(t)\,(p_e\,\Delta e + p_h\,\Delta h + p_u\,\Delta u + p_t\,\Delta t + p'_s\,\Delta s - t_e\,\Delta e)$$

où les indices e correspondent à l'essence, h à l'huile, u à l'usure des véhicules, t au temps et s à la sécurité;

— avantages individuels résultant du trafic induit, soit, $T_i\,(t)$ représentant ce trafic à l'année t :

$$\frac{T_i\,(t)}{2}\,(P_e\,\Delta e + p_h\,\Delta h + p_u\,\Delta u + p_t\,\Delta t)$$

$e_i\,h_i$ représentant les quantités d'essence, d'huile, ... consommées sur l'ancien parcours [1].

— et en variation d'avantages collectifs, soit :

$$T_{hi}\,(t)\,[p'_s\,\Delta s - t_e\,\Delta e] - T_i\,(t)\,[p'_s\,(s - \Delta s) - t_e\,(e - \Delta_e)]$$

t_e représente le montant de la surtaxation du carburant; la diminution de consommation d'essence entraîne une part de recettes fiscales de $T_{ni}\,(t) \times t_e \times \Delta e$ compté pour une diminution d'autant de la satisfaction collective.

[1] La justification de cette formule est la suivante : pour le trafic induit dû à des individus qui, antérieurement, n'empruntaient pas l'itinéraire, la formule $dU = \Sigma\, p_i\, dq_i$ doit porter non seulement sur les dépenses d'essence, d'huile, de temps, etc. qu'ils font à l'occasion du trajet, mais aussi sur le trajet lui-même, qu'auparavant ils trouvaient désavantageux et qui présente pour eux une valeur économique qu'on peut précisément apprécier par son coût antérieur. Si l'on remarque en plus que pour eux la transformation n'est pas marginale, la variation d'utilité s'écrira :

$$\Delta\, U = -\int p_e\,\Delta e - \int p_h\,\Delta h - \int p_u\,du - \int p_t\,dt + \int v_t\,dT_i$$

T_i représentant le trafic induit et v_t représentant la valeur économique du trafic induit aux yeux des nouveaux usagers; en approchant v_t par une formule linéaire :

$$v_t = (e\,p_e + \ldots)\,\frac{1 - T_i}{T_i\,(t)} + [(e - \Delta e)\,p_e + \ldots]\,\frac{T_i\,(t)}{T_i}$$

et en intégrant les premières intégrales de 0 à $e - \Delta e$, $h - \Delta h$... et la dernière de 0 à T_i on aboutit à l'expression indiquée.

Si, maintenant, on désigne par C le coût de construction de l'ouvrage, le bénéfice, actualisé à l'époque actuelle, issu de la réalisation de l'opération à l'année t' sera :

$$B(t') = -\frac{C}{(1+i)\,t'} + \sum_{t \geq t'+1} \frac{A(t)}{(1+i)^t}.$$

Il faut maintenant déterminer la date optimale de réalisation de l'ouvrage. En effet, cette réalisation peut être différée dans le temps et il s'agit de voir, non seulement si l'opération est rentable, mais aussi à quelle date il est préférable de la faire; or, les avantages varient comme le trafic, qui croît dans le temps et on peut avoir intérêt à repousser une opération déjà rentable mais qui le sera encore plus si on ne la fait que plus tard.

D'une manière plus précise, en rapportant l'opération de t' à $t'+1$, on aura le bénéfice :

$$B(t'+1) = -\frac{C}{(1+i)^{t'+1}} + \sum_{t \geq t'+2} \frac{A(t)}{(1+i)^t}$$

le gain du report d'une année sur l'autre sera donc :

$$B(t'+i) - B(t') = \frac{1}{(1+i)^{t'+1}}\,[(1+i)\,C - C - A(t'+i)]$$

ou

$$\frac{1}{(1+i)^{t'+1}}\,[i\,C - A(t'+1)].$$

Ce report sera avantageux jusqu'à l'année T, tel que : $A(T+1) = iC$ et c'est cette année T qu'il faudra réaliser l'investissement, si toutefois son bénéfice $B(T)$ est positif.

Précisons d'ailleurs que toute cette procédure de choix est, comme la théorie du surplus qu'elle utilise, limitée à des opérations marginales, c'est-à-dire de faible importance, et n'affectant pas la structure économique. C'est bien le cas en France (1) où les liaisons nouvelles ne font qu'améliorer celles qui existent déjà; il n'en serait pas de même dans un pays sous-développé où la création d'un axe de transport peut être la condition *sine qua non* de développement de toute une région.

La méthode précédente fait savoir si tel type d'opération, par exemple l'élargissement à 4 voies d'une route à 2 voies, est rentable et à quelle époque il faut la réaliser; mais elle ne permet pas d'affirmer que l'opération en question est la meilleure de toutes celles possibles, qui comportent aussi,

(1) Avec quand même quelques réserves quand il s'agit par exemple du pont de Tancarville.

en schématisant, l'élargissement à 3 voies, la construction d'une autoroute parallèle ou toutes combinaisons de ces solutions, par exemple élargissement à 3 voies puis, 10 ans après, construction d'une autoroute.

Dans le deuxième des articles cités [1], C. Bozon et C. Charmeil se sont servis des résultats précédents pour étudier, sur une liaison type, le choix et l'échelonnement des opérations à effectuer dans le temps pour répondre au développement prévisible du trafic. La méthode, simple dans son essence, consiste, par exemple pour une route à 2 voies, à comparer les bénéfices actualisés globaux des diverses solutions possibles :

— Elargissement à 3 voies; plus tard, élargissement à 4 voies; plus tard, autoroute.

— Elargissement à 3 voies; plus tard, élargissement à 4 voies.

— Elargissement à 3 voies.

— Elargissement à 4 voies, plus tard autoroute, etc.

Il s'agit là typiquement d'une étude de programmation dynamique, dans laquelle la décision actuelle s'insère dans une chaîne et ne peut être prise sans considération du futur éloigné. Sans entrer dans le détail de leurs conclusions, citons néanmoins l'une d'entre elles qui rejoint étroitement nos propos antérieurs : « On ne saurait effectuer de grands investissements sur une liaison sans étudier le volume du trafic qu'elle est susceptible de supporter à une date très éloignée prise comme horizon. La définition d'une perspective à long terme apparaît essentielle malgré l'incertitude rencontrée lorsqu'on s'éloigne du moment présent ».

Ce sont à ces sortes de préoccupations que répondent, sur un plan plus général, les recherches de prospective, dont on connaît le développement depuis quelques années.

Enfin, sans quitter le domaine des transports, analysons un exemple, fictif, de décision à prendre dans le cadre d'un avenir mal connu :

Supposons, par exemple, qu'il s'agisse de construire un pont et que le problème à trancher soit celui du dimensionnement de ce pont, qui pourra être à 2 ou 4 voies de circulation; la décision à prendre dépend évidemment étroitement des perspectives de trafic futur; mais ce trafic futur n'est pas connu avec certitude; une étude préliminaire aura montré que deux hypothèses pour le développement de ce trafic peuvent être retenues : l'une faible, pour laquelle un pont à 2 voies suffirait, l'autre forte, qui nécessiterait la mise en service d'un pont à 4 voies.

Il est possible, dans chacune des quatre situations susceptibles de se produire, de mesurer, par les méthodes précédemment indiquées, le bénéfice actualisé qu'en retirera la collectivité.

[1] La Programmation des investissements sur une liaison.

Ordonnons les bénéfices suivant un tableau carré, portant en lignes les deux décisions possibles et en colonne les deux événements susceptibles de se produire. Avec des valeurs fictives des bénéfices actualisés, on aura :

	Circulation forte	Circulation faible
Décision	—	—
Pont à 2 voies	150	200
Pont à 4 voies	300	100

En face d'un tel tableau, on pourrait songer à un des critères de la théorie des décisions, par exemple appliquer des probabilités subjectives à chacune des hypothèses sur la circulation future, ou bien par contre, estimer qu'on se trouve dans un cas d'incertitude totale et utiliser l'un des critères qui ont été proposés pour ce cas. Mais en fait la situation réelle dans laquelle on se trouve ne se laisse pas enfermer dans des moules aussi rigides : on n'est pas évidemment dans l'incertitude totale en ce qui concerne le niveau futur de la circulation, mais de là à affecter à chacun de ces niveaux possibles une probabilité précise, il y a un pas qu'il est difficile de franchir. Comment alors opère l'ingénieur économiste ? Il essaie successivement les diverses méthodes et regarde dans quelle mesure leurs indications concordent et sont acceptables. Reproduisons le déroulement de ce processus : on sait que les deux hypothèses de circulation semblent également vraisemblables l'une et l'autre; examinons donc quelle sera la meilleure solution si on leur affecte à chacune une probabilité égale; le bénéfice moyen qu'on retirera d'un pont à 3 voies sera alors :

$$150 \times 0{,}5 + 200 + 0{,}5 = 175,$$

celui que procurera le pont à 4 voies sera :

$$300 \times 0{,}5 + 100 \times 0{,}5 = 200.$$

L'avantage va, semble-t-il, au pont à 4 voies. Regardons, maintenant, à partir de quelle distribution de probabilité p_1 pour une circulation forte et $(1 - p_1)$ pour une circulation trop faible, le résultat serait inversé : ce sera quand :

$$150 + p_1 + 200\,(1 - p_1) = 300 \times p_1 + 100\,(1 - p_1)$$

soit :

$$-50\,p_1 + 200 = 200\,p_1 + 100$$

$$250\,p_1 = 100$$

$$p_1 = \frac{100}{250} = 0{,}4\,;$$

or, l'idée que l'on a sur les probabilités a priori, en ce qui concerne l'évolution du trafic, peut être trop vague pour qu'on puisse être sûr que p_1 n'est pas inférieur à 0,4.

Le critère des probabilités subjectives ne fournit donc alors qu'une présomption en faveur de la solution « pont à 4 voies ».

Examinons ce que nous apprennent les critères susceptibles d'être utilisés dans l'hypothèse de l'incertitude totale. L'attitude la plus prudente revient à choisir la solution qui fournit le plus grand bénéfice dans l'hypothèse où se réalise l'événement le plus défavorable. C'est le critère minimax, qui revient à supposer que la nature est « mauvaise » et qui conduit ici à choisir la solution pont à 2 voies puisqu'elle assure un bénéfice minimum de 150, alors que le pont à 4 voies peut n'entraîner qu'un bénéfice de 100.

Une autre règle de décision proposée par Savage est le « minimax regret »; elle revient à prendre la décision qui donnera le plus faible « regret ».

Si l'hypothèse « circulation forte » se réalise, je n'aurai pas de regret si j'ai construit le pont à 4 voies, mais j'en aurai un que je peux chiffrer à 300 — 150 = 150, si c'est le pont à 2 voies qui a été édifié.

Si, par contre, le trafic ultérieur est faible, mon regret, nul dans le cas du pont à 2 voies, sera de 200 — 100 = 100 pour celui à 4 voies. On aboutit ainsi au tableau des regrets :

	Circulation forte	Circulation faible
2 voies	150	0
4 voies	0	100

Je choisi donc un pont à 4 voies qui ne me donnera qu'un regret ou une perte de 100 alors que la solution 2 voies pourrait conduire à une perte de 150.

Cet examen laisse insatisfait; les indications des différents critères sont contradictoires et ne permettent pas de se fixer avec certitude. Mais il faut agir. Probablement, dans ce cas, construira-t-on un ouvrage à 4 voies, à moins que des limitations globales de crédits n'incitent à reporter sur un projet plus sûr la différence de coût entre le pont à 4 et celui à 2 voies.

***

Ainsi, au plan normatif, la théorie de la décision ne peut pas toujours lever des ambiguïtés inhérentes à la nature des choses, mais elle permet au moins de choisir avec une meilleure connaissance des conséquences possibles, ce qui est déjà énorme. La décision est du ressort de l'homme, mais la science économique doit l'éclairer du mieux qu'elle peut, en lui faisant apparaître clairement les divers choix, en résolvant au mieux les problèmes à caractère « technique » pour mieux dégager ce qu'il reste de « politique » et qui n'est plus du domaine proprement scientifique mais humain.

On peut par contre être plus sceptique sur sa valeur explicative : elle définit un comportement idéal, rationnel, mais les actions réelles obéissent-elles à ce schéma ? C'est ce qu'il restera à voir dans le prochain chapitre.

CHAPITRE 8

LA PRISE EN COMPTE DU FUTUR LES MÉCANISMES RÉELS DE PRÉVISION ET DE DÉCISION

Les théories développées dans le chapitre précédent possèdent un grand pouvoir de séduction en raison de leur élégance et de leur précision. Elles ne manquent pas toutefois de laisser insatisfait, et si l'on analyse les motifs de cette insatisfaction, on trouvera qu'ils sont de deux ordres :

Tout d'abord, elles mettent en jeu un individu en quelque sorte idéal, parfaitement conscient du but qu'il veut atteindre et qui, à partir de raisonnements rigoureux, tire le meilleur parti possible de la situation où il se trouve. Il s'agit là en somme d'une nouvelle version de l'*homo economiens*, cet être inhumain à force de perfection. L'homme réel a-t-il cette lucidité, cette persévérence, cette intelligence, que réclame la théorie ? C'est ce qui sera examiné dans une première section.

Mais, même si cela était, les théories précédentes ne manqueraient-elles pas de fondations, ne ressembleraient-elles pas à une pyramide posée sur sa pointe ? Elles disent bien, en effet, comment à partir d'un but fixé, et dans l'hypothèse d'un certain contexte futur, les individus doivent se comporter, mais elles restent muettes sur les buts qui les animent et la manière dont ils forment leur image du futur. Remarquons d'ailleurs que ceci n'est pas imputable à la théorie de la décision elle-même : elle peut, à cet égard, être comparée à une machine, somme toute bien construite et en bon état de marche, mais qui, si on ne lui donne pas de matière à transformer, tournera à vide, inutilement. Il y a là, semble-t-il, un champ immense offert à l'observation concrète dont le rôle serait précisément de déterminer les buts des agents économiques et la manière dont ils voient l'avenir; et il est, évidemment, hors du présent propos de l'explorer entièrement; on voudrait simplement étudier ici la manière dont se forment les prévisions économiques à court terme, et dont elles interviennent dans les mécanismes décisionnels; ce sera l'objet de la deuxième section du présent chapitre.

Enfin, une place à part sera accordée aux prévisions et décisions à long terme; l'éloignement dans le temps entraîne un changement dans la nature des problèmes soulevés et nécessite l'appel à des modes d'analyse très différents. La troisième section sera l'occasion d'une rapide allusion à ce sujet.

1 - COMPORTEMENT OPTIMAL ET COMPORTEMENT DE FAIT

1) La théorie des jeux décrit-elle correctement les comportements de fait ?

Notons les difficultés qui se présentent lorsque l'on veut comparer le comportement réel d'individus avec celui que prévoit la théorie.

Cette dernière part de la notion d'utilité, qu'elle prend comme donnée. Encore faut-il vérifier que ces utilités existent, qu'on peut les déterminer. En principe, le problème est assez simple : à partir de deux événements A et B, l'un très désagréable, auquel on assigne une utilité 0, et l'autre très favorable, dont l'utilité est fixée à 1, on recherche l'utilité d'un 3e événement C en demandant au sujet pour quelle valeur de r la loterie lui procurant B avec la probabilité r et A avec la probabilité $1 - r$ lui paraît équivalent à C; l'utilité de C sera alors :

$$u(c) = r,$$

ensuite, ayant obtenu ainsi l'utilité attachée à un certain nombre d'événements C, D, E, ..., on pourra contrôler la cohérence de ces utilités, en demandant au sujet directement sa préférence entre une loterie donnant C ou E suivant certaines probabilités et l'événement D.

La difficulté essentielle réside dans le fait que la cohérence ainsi mise en évidence ne sera pas parfaite, elle ne sera vraie qu'en moyenne; on rencontrera, comme dans toute expérimentation, des écarts par rapport à la théorie. Comment faire le partage entre ces erreurs d'expérimentation et celles dues à une éventuelle erreur de la théorie, puisque celle-ci précisément ne laisse pas de place à l'erreur ou à l'incertitude sur l'échelle de préférence des individus ?

Il semble bien, au vu des expériences menées jusqu'ici, que si la théorie de l'utilité est vraie en gros, les choix des individus présentent souvent une certaine incohérence qui, bien que peu apparente, n'en est pas moins réelle.

Si quelqu'un déclare préférer A et B et B à C, il dira également préférer A à C mais si la préférence de A sur B et B sur C est mise en évidence par des comparaisons indirectes de A, B, C, à des loteries types, alors le sujet pourra, si on lui pose directement la question « préférez-vous A à C » ? se « couper » et répondre non. La théorie de l'utilité est donc en quelque

sorte trop rigide; en prétendant assigner à chaque événement une utilité bien déterminée, elle réclame trop à l'esprit de continuité et au pouvoir de discrimination des individus; il serait nécessaire de la nuancer en introduisant pour chaque événement non pas une utilité, mais une distribution d'utilités probables.

Ensuite, en supposant la notion d'utilité admise, on peut tenter de reproduire des jeux du type de ceux que considère la théorie du même nom; mais là, beaucoup d'événements contingents risquent d'influer sur le résultat obtenu, en créant un climat psychologique prédisposant le joueur, en dehors de toute raison objective, vers telle ou telle action.

C'est ainsi que le temps laissé à la réflexion peut être un élément perturbateur important; d'autre part, l'attitude des autres joueurs, notamment dans les jeux où les coalitions sont possibles peut être déterminante. Il ne faut donc pas s'étonner que les vérifications expérimentales des théorèmes de la théorie des jeux soient rares, et que les résultats en soient très souvent flous. Pour illustrer cela nous voudrions à titre d'exemple relater certains essais effectués à partir du jeu mettant aux prises deux joueurs, ayant chacun à sa disposition deux stratégies a_1 et a_2 pour le joueur A, et b_1 et b_2 pour le joueur B (1).

Si A et B jouent l'un a_1, l'autre b_1, chacun touche 3; si A joue a_1 et B, b_2, A touche 0 et B 5; si A joue a_2 et B, b_1 ne touche rien et A touche 5; enfin, si A joue a_2 et B joue b_2, chacun gagne 1; on peut rassembler ces hypothèses dans le tableau suivant :

		B	
		b_1	b_2
A	a_1	(3,3)	(0,5)
	a_2	(5,0)	(1,1)

Il s'agit là d'un jeu à somme non nulle puisque la somme des gains des deux joueurs n'est pas indépendante de leur choix. La solution théorique de ce jeu dépend des possibilités de coopération des deux joueurs : s'ils ne peuvent pas coopérer, la solution minimax qui leur fait jouer la stratégie leur assurant le gain minimum le plus élevé, conduit à (a_2 b_2) qui assure à chacun un gain de 1, alors que par exemple la stratégie a_1 peut ne procurer aucun gain à A, si B, joue b_2.

Si, par contre, les joueurs peuvent coopérer, c'est-à-dire s'entendre pour obtenir le gain total maximum, quitte ensuite à se le partager, c'est évidemment le choix a_1 b_1 qui doit apparaître.

(1) Luce et Raïffa : Games and decisions (1958).

Les résultats expérimentaux confirment à peu près la théorie, quand on place les joueurs dans une situation de non coopération, c'est-à-dire quand on ne leur permet pas de communiquer entre eux : alors, la plupart du temps, c'est la solution a_2 b_2 qui est choisie; les autres combinaisons apparaissent aussi, mais avec une fréquence nettement moins grande.

Par contre, quand on permet aux joueurs de communiquer entre eux, d'échanger des propos quelconques, il semble qu'ils n'aient que rarement l'idée de s'entendre pour combiner leurs stratégies au mieux de leur intérêt, et le plus souvent on retombe sur la stratégie (a_2 b_2).

Cette absence de coopération est encore accusée par les réflexions dont font part les sujets à la fin du jeu : il en ressort que leur but n'est pas tant de gagner le maximum comme le voudrait la considération des utilités, que de battre leur adversaire, même si alors il en résulte pour eux un gain moindre.

Mentionnons aussi les résultats d'expérience sur des jeux à plus de deux personnes dans lesquels les coalitions étaient autorisées. On a alors obtenu une grande variété de situations dans lesquelles c'était telle ou telle coalition qui se formait et il semblait bien que la psychologie des sujets n'était pas étrangère au choix final auquel ils aboutissent [1].

Tout ceci ne diminue pas, semble-t-il, l'intérêt de la théorie des jeux; celle-ci fournit un cadre, un schéma de référence idéal par rapport auquel il est possible de situer le comportement réel, et qui permet de caractériser son degré d'irrationnalité ainsi que les causes de cette irrationnalité. Mais cela montre, aussi, l'intérêt d'études à caractère psychologique analysant les sources du comportement humain, qui peuvent être beaucoup plus contingentes que la recherche de la satisfaction maximale de la part d'un individu doué d'une logique parfaite.

2) Les processus d'apprentissage

Particulièrement prometteuse à cet égard est la théorie de l'apprentissage. Cette théorie vise à expliquer la manière dont un individu choisit, parmi un ensemble possible, sa réponse à une sollicitation extérieure, compte tenu de la manière dont se sont déroulées des expériences antérieures analogues. La sollicitation extérieure pourra être, par exemple, l'apparition sur un cadran d'un chiffre compris entre 0 et 9 et la manière dont le sujet répond à cette sollicitation sera par exemple le temps qu'il met à appuyer sur celui des 10 boutons mis à sa disposition qui correspond au chiffre qui vient d'apparaître; il est intuitif que, par exemple, si le chiffre qui apparaît est déjà survenu récemment alors le temps de réponse du sujet sera en général plus court.

[1] Il faut noter d'ailleurs que dans ce type de jeu la théorie n'aboutit pas à des conclusions fermes : différents auteurs ont proposé des solutions possibles entre lesquelles il est bien difficile de choisir !

Prenons un exemple particulier : supposons qu'un animal (ou un homme) se trouve placé au début de chaque expérience dans un labyrinthe à deux branches qu'il a à parcourir; s'il choisit la branche de droite, l'expérimentateur le récompensera une fois sur deux; s'il choisit la branche de gauche, l'expérimentateur ne lui donne aucune récompense. Un sujet logique devrait au bout de quelques essais, se rendre compte qu'il a intérêt à prendre toujours la branche de droite. Or, on constate que ce comportement rationnel n'est pas celui des animaux, ce qui n'est pas tellement choquant, ni non plus celui des hommes, ce qui est plus inquiétant.

Un modèle théorique dû à Estes [1] vise à expliquer ce phénomène : d'après ce modèle, l'action du sujet est préparée, conditionnée, par l'existence d'éléments stimulants qui chacun l'inclinent vers l'une ou l'autre des deux réponses possibles. Au cours de chaque expérience, il en retient un certain nombre et agira suivant les indications de ces derniers : si la plupart d'entre eux l'inclinent à aller à droite, il aura de très fortes chances de choisir cette réponse de préférence à l'autre. Reste alors à fixer suivant quelles règles les éléments stimulants le préparent à une réponse plutôt qu'à l'autre; ce sera, d'après Estes, selon le résultat des expériences antérieures; si un élément stimulant conditionné antérieurement à la réponse « aller à droite », contribue à cette réponse et s'il en est ensuivi une récompense, alors l'élément stimulant reste propice à cette réponse; si aucune récompense n'a eu lieu, l'élément stimulant en question sera jusqu'à nouvel ordre orienté vers la réponse inverse; explicitons cela de manière mathématique dans le cas où il n'y aura que deux éléments stimulants, pouvant tous les deux inciter à aller à droite : (d, d), ou à aller à gauche (g, g), ou encore l'un favorisant la réponse à droite, l'autre la réponse à gauche (d, g) ou (g, d).

Pour voir la manière dont s'enchaîneront les expériences, partons d'un état hypothétique des deux éléments stimulants, par exemple (d, g). Supposos qe chaque élément stimulant soit perçu par le sujet avec la probabilité θ. Alors, le sujet perçoit les deux éléments (d, g) avec la probabilité θ^2; il percevra $(d, \ )$ ou $(\ , g)$ avec la probabilité $\theta\,(1 - \theta)$ et il a une probabilité $(1 - \theta)^2$ de ne rien percevoir du tout.

S'il a perçu les deux éléments stimulants (d, g), il ira à droite avec une probabilité 1/2 et à gauche avec le même nombre de chances. Si, allant à droite, il reçoit une récompense, les deux éléments stimulants deviendront orientés vers l'action « aller à droite » pour l'expérience ultérieure; si, par contre, il ne reçoit pas de récompense, les deux éléments stimulants s'orienteront vers l'acte « aller à gauche ».

S'il a perçu seulement l'élément stimulant $(\ , g)$ il ira à gauche et ne recevra pas de récompense et ce 2e élément stimulant restera g, et le premier d, qui n'a pas été perçu sera également inchangé.

[1] Voir à ce sujet pour plus de détails : Kemeny, Snell, Thompson : Algèbre moderne et activités humaines (1960).

S'il n'a perçu que $(d, \ )$ il ira à droite; et s'il est récompensé, le premier stimulant restera d; s'il ne l'est pas, il deviendra g; le deuxième stimulant, non perçu lors de cette expérience restera g.

Enfin, si aucun des stimulants n'est perçu, leur orientation ne changera pas au cours de l'expérience.

Tout ceci peut se résumer dans le tableau ci-contre.

Orientation initiale des stimulants	Stimulants perçus	Action du sujet: aller à	Existence d'une récompense	Nouvelle orientation des stimulants	Probabilité du cas considéré
(d, g)	(d, g)	droite	oui	(d, d)	$\frac{\theta^2}{4}$
			non	(g, g)	$\frac{\theta^2}{4}$
		gauche	non	(g, g)	$\frac{\theta^2}{2}$
(d, g)	$(d, \ )$	droite	oui	(d, g)	$\frac{\theta(1-\theta)}{2}$
			non	(g, g)	$\frac{\theta(1-\theta)}{2}$
	$(\ , g)$	gauche	non	(d, g)	$\theta(1-\theta)$
	$(\ , \ )$			(d, g)	$(1-\theta)^2$

On peut à partir de cet arbre, calculer la probabilité pour qu'à partir de l'état (d, g) le sujet passe à l'état :

$$(d, d) : \frac{\theta^2}{4}$$

$$(d, g) : \frac{3\,\theta\,(1-\theta}{2} + (1-\theta)^2$$

$$(g, d) : 0$$

$$(g, g) : \frac{2\,\theta^2}{4} + \frac{\theta\,(1-\theta)}{2}.$$

On pourrait de même définir les probabilités de passage de chacun des états initiaux possibles, aux différents états possibles en fin d'expérience. On aboutit alors à une chaîne de Markov, c'est-à-dire un processus aléatoire dans lequel la probabilité de se trouver en tel ou tel état à l'instant t ne dépend que de l'état où l'on se trouvait à l'instant $t - 1$. Un tel processus est caractérisé par sa matrice de passage M, tableau dans lequel sont portés en ligne les états au début de période, en colonne les états en fin de période et dans chaque case, la probabilité de passage. Si, au début de la première expérience, les probabilités $p_1(0)$ $p_n(0)$ d'être en chacun des états possibles 1, 2 ... n sont représentées par le vecteur $\pi(0)$, les probabilités $p_1(1)$ ... $p_n(1)$ d'aboutir au bout de la première période en chacun des états 1, 2 ... n seront données par la relation, facile à établir

$$\pi(1) = \pi(0) M$$

$\pi(1)$ étant le vecteur de composantes $p_1(1)$ ... $p_n(1)$; de même, les probabilités d'aboutir à une période quelconque t en chacun des états possibles seront

$$\pi(t) = \pi(t - 1) M = \pi(0) M^t;$$

on démontre que sous certaines conditions, le produit $\pi(0) M^t$ tend vers un vecteur fixe π, indépendante de $\pi(0)$, lorsque t augmente indéfiniment (1). On dit alors que la chaîne est régulière; en pratique, cela veut dire que, au bout d'un temps assez long, la situation dans laquelle on se trouvera sera indépendante de la situation de départ; en outre les fréquences moyennes d'apparition de chacun des différents états seront toujours les mêmes quel que soit l'état de départ, elles seront données par les composantes de π.

Un cas de régularité sera celui du battage d'un jeu de cartes; si les cartes sont battues correctement, au bout d'un temps assez long, leur disposition ne présentera plus aucune régularité même si au départ elles étaient complètement ordonnées, et la probabilité que telle carte soit par exemple la première sera $\frac{1}{52}$ quel que soit l'ordre initial (2).

On verrait que dans le cas présent, la chaîne est régulière, c'est-à-dire qu'au bout d'un temps assez long, l'état de départ sera sans influence sur l'orientation des stimulants; on peut calculer la fréquence finale de chacune des orientations possibles :

$$\pi(d, d) \ , \ \pi(d, g) \ , \ \pi(g, d) \ , \ \pi(g, g)$$

(1) Cela se produit s'il existe p tel que toutes les composantes de M^p sont positives. En particulier, si toutes les composantes de M sont positives, on peut prendre $p = 1$, et la propriété est vérifiée.

(2) Pour une présentation moins sommaire des chaînes de Markov, voir par exemple Blanc - Lapierre et Fortet « Théorie des fonctions aléatoires », ou J. Mothes « Prévisions et statistiques dans l'entreprise ».

et par là la fréquence moyenne des réponses « aller à droite » et « aller à gauche ». Elles seront :

$$F(d) = \pi(d, d) + 1/2\,\pi(d, g) + 1/2\,\pi(g, d)$$

et

$$F(g) = \pi(g, g) + 1/2\,\pi(g, d) + 1/2\,\pi(d, g).$$

On trouve :

$$F(d) = 2/3 \quad \text{et} \quad F(g) = 1/3.$$

C'est-à-dire que finalement le sujet ira en moyenne deux fois sur trois à droite et une fois sur trois à gauche.

Ces résultats sont à peu près confirmés par l'expérience et on voit qu'ils sont assez éloignés de ce que devrait être le comportement purement rationnel qui invite le sujet à aller constamment à droite.

On a donc là l'exemple d'une formalisation de comportement plus souple et plus conforme à la réalité que la théorie des jeux, dans laquelle les facteurs psychologiques sont introduits explicitement et permettent de rendre compte de l'écart entre comportement observé et comportement optimum. Certes, tout ceci est encore loin des situations concrètes et ne semble pas immédiatement applicable à l'économie; des points restent obscurs comme par exemple la nature des éléments stimulants; certains choix ont un aspect arbitraire, comme la limitation à deux du nombre de ces éléments stimulants.

Citons encore des expériences très intéressantes effectuées par H. Rouanet (1) et qui se rattachent aussi à cette notion d'apprentissage progressif.

On présente à différents sujets, un lot de sachets contenant des billes rouges et des billes bleues; ces sachets sont de deux sortes, qu'on ne peut distinguer par l'aspect extérieur; les uns que nous nommerons B contiennent 59 billes bleues et 41 billes rouges; les autres R ont une majorité de 59 billes rouges pour 41 billes bleues. Enfin, dans le lot, il y a une proportion b de sachets B et r de sachets R. On informe le sujet de ces différents éléments et on lui fait connaître, lors de chaque expérience le rapport $\frac{r}{b}$; celui-ci a pris les valeurs 1, 2, 4, 8 et 16. Présentant alors au sujet un lot de sachets, on lui en fait choisir un au hasard et on lui demande de déterminer s'il est B ou R; pour cela, le sujet a le droit de tirer (avec remise) des billes dans ce sachet jusqu'à ce que sa conviction sur la nature du sachet soit faite et on lui demande de se décider avec le même degré de certitude pour les différentes expériences. Le sujet dispose donc pour se décider de deux sources d'informations : une information a priori, caractérisée par la proportion $\frac{r}{b}$ de

(1) H. Rouanet : Etudes de décisions expérimentales et calcul des propabilités, in *La Décision* (1961).

sachets R dans le lot d'où ils ont été tirés, et une information a posteriori, constituée par les tirages successifs qu'il fait dans le sachet.

Si, lors des tirages, n billes sont tirées, comprenant ρ billes rouges, la probabilité d'obtenir un tel résultat E, si le sachet est R, est :

$$P(E/R) = C\,(0{,}59)^{\rho}\,(0{,}41)^{n-\rho}$$

et si le sachet est B :

$$P(E/B) = C\,(0{,}41)^{\rho}\,(0{,}54)^{n-\rho}$$

de sorte que :

$$P(E) = C\,(r\,(0{,}59)^{\rho}\,(0{,}41)^{n-\rho} + b\,(0{,}41)^{\rho}\,(0{,}59)^{n-\rho})$$

et, pour les probabilités que le sachet soit rouge ou bleu à partir de la connaissance de l'événement t :

$$P(R/E) = \frac{1}{1 + \frac{b}{r}\left(\frac{0{,}41}{0{,}59}\right)^{d}}$$

$$P(B/E) = \frac{1}{1 + \frac{r}{b}\left(\frac{0{,}59}{0{,}41}\right)^{d}}$$

en appelant d l'excès des billes rouges sur les billes bleues.

En toute logique, l'individu se décidera à partir du tirage qui conduit pour $P(R/E)$ ou $P(B/E)$ à une valeur supérieure au seuil de certitude qui lui convient [1]. On voit que la décision ne doit dépendre que des probabilités a priori r et b et de l'écart d entre le nombre de billes rouges et bleues tirées. Plus précisément, on peut établir un graphique portant en abscisse d et en ordonnée le logarithme de $\frac{r}{b}$; les courbes d'égales certitudes dans la décision prise sont des droites à 45° comme il est figuré ci-après (fig. 8-1).

Elles montrent que si le rapport $\frac{r}{b}$ est de 2, c'est-à-dire si les probabilités a priori sont de 2 contre 1 en faveur de R, et si l'on ne veut trancher qu'avec une probabilité de 0,89, il faut choisir R dès que l'excès de billes rouges tirées est de l'ordre de 4 mais que l'on ne doit choisir B que si l'excès de billes bleues est de 8.

[1] Cette décision conduit à utiliser le principe des probabilités a priori, ou principe de Bayes, dont l'intervention apparaît ici toute naturelle; pour une justification simple de son introduction dans d'autres situations de choix séquentiels, voir G. D'HERBEMONT : Aspects de la théorie statistique des décisions, *Revue de Statistique Appliquée* (1963).

Les comportements réels suivent-ils ce schéma théorique ? Les segments fléchés reportés sur ce même graphique (fig. 8-1), montrent le résultat d'expériences. Les points indiquent les valeurs de $\frac{r}{b}$ et de d pour lesquelles les sujets se sont décidés, les flèches indiquent l'ordre chronologique des expériences; l'ensemble des points observés correspond assez bien à deux droites, l'une verticale pour les décisions B, l'autre à 45° théorique, pour les décisions R. Dans les deux cas, on est assez loin de ce que voudrait la logique; reprenons la conclusion de H. Rouanet : « Les décisions précédentes sont en effet des décisions dépendant de « deux critères » : un critère « a priori » et un critère « expérimental ».

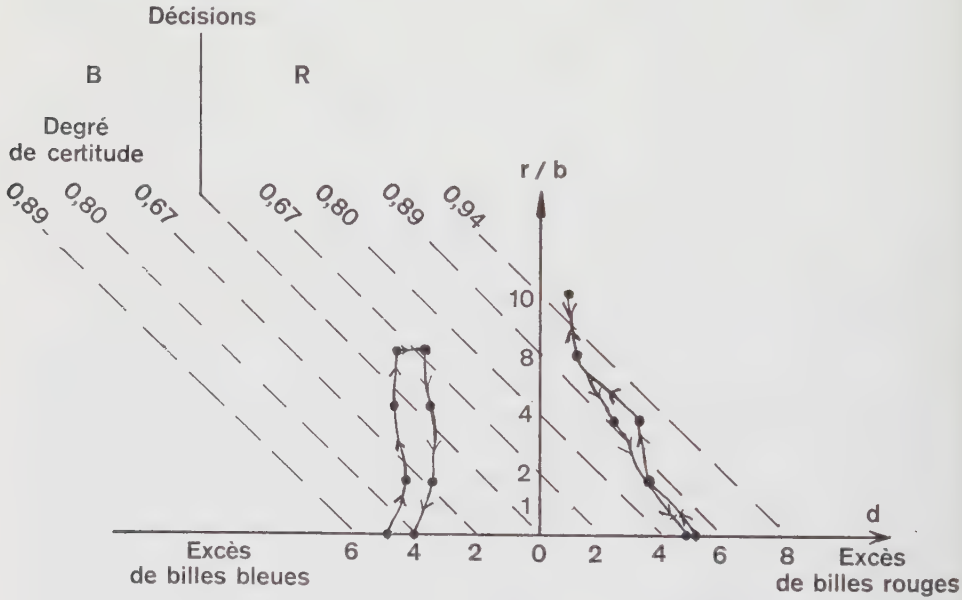

FIG. 8-1. — Courbes de décision ——— théoriques
– – – – réelles

Source : H. ROUANET, *op. cit.*

« Lorsque les informations qu'ils apportent sont convergentes, le sujet tient compte de deux sources d'information, établissant une pondération conforme au théorème de Bayes. Mais s'il y a divergence entre les informations apportées par les deux critères, le sujet, au lieu de devenir plus exigeant, ignore l'un des deux critères : dans le cas de l'expérience, il a ignoré le critère a priori de nature « conceptuelle », pour ne tenir compte que du critère « a posteriori » de nature plus « perceptuelle ».

« Le témoignage expérimental anéantit les connaissances qu'on pouvait avoir a priori ».

En outre, d'après le cheminement des flèches, les décisions sont prises plus facilement (c'est-à-dire avec un *d* plus faible) à mesure que le temps passe : les sujets sont « d'une façon absolument générale, moins exigeants dans la phase de retour ».

On ne manquera pas de reconnaître dans bien des expériences quotidiennes cette différence de poids accordée à la connaissance a priori et à l'expérience vécue et cette accoutumance à la décision, qui semblent donner un certain caractère de généralité aux résultats précédents.

En tout cas, la voie ainsi ouverte semble susceptible, par la dialectique qu'elle implique entre la réflexion théorique et l'expérimentation, d'enrichir considérablement notre connaissance des mécanismes de prise de décision.

3) La formation psychologique des décisions selon Shackle

Shackle a édifié un schéma fort différent de celui de la théorie de la décision [1]; alors que cette dernière vise à définir le meilleur acte possible, et présente donc un caractère normatif accusé, Shackle par contre s'efforce d'étudier les mécanismes qui se déroulent dans l'esprit de l'agent, et l'analyse à laquelle il se livre le conduit à récuser la notion de probabilité, qui est à la base de la théorie de la décision. Pour lui, ce n'est pas la probabilité des événements qui surgit à l'esprit des agents, c'est leur vraisemblance ou leur invraisemblance, mesurées par la surprise potentielle, c'est-à-dire par le degré d'étonnement que provoquerait leur apparition. Un événement parfaitement possible se verra attacher une surprise potentielle nulle, et un événement totalement impossible une surprise potentielle de, mettons 1. La différence essentielle entre ce concept et celui de probabilité est que la somme des probabilités de différents événements exclusifs est toujours l'unité, alors que la somme de leurs surprises potentielles peut prendre toute valeur. Pour le voir, considérons le cas particulier de la prévision d'un niveau futur de la demande, où l'alternative est « la demande sera supérieure à 100 ou inférieure à 100 »; les probabilités de chacune de ces deux éventualités seront bien sûr de somme unité; mais, en ce qui concerne la surprise potentielle aucune norme de ce genre ne peut être fixée a priori; il se trouvera par exemple que la survenance de l'une quelconque d'entre ces éventualités ne causerait aucune surprise à l'agent; leurs surprises potentielles seront toutes les deux nulles, ainsi que leur somme. Ou bien encore, l'une d'entre elle ne causerait aucune surprise, mais l'autre serait assez inattendue; la somme de leurs surprises potentielles sera

$$0 + \alpha = \alpha$$

α étant inférieur à l'unité.

(1) G.L.S. Shackle : Décision, déterminisme, et temps (Dunod, 1967).

Un autre élément essentiel de la construction de Shackle est constitué par l' « attirance », qui mesure en quelque sorte le degré selon lequel les différents événements possibles accaparent l'esprit [1]. L'attirance d'un événement dépend d'une part du degré de surprise potentielle, et d'autre part du gain (ou de la perte) attaché à cet événement. Pour des événements présentant le même degré de surprise potentielle l'attirance sera d'autant plus forte que le gain (ou la perte) est plus élevé; et pour un même gain (ou une même perte), l'attirance sera d'autant plus forte que la surprise potentielle est plus faible. Si l'on note le gain (ou, en négatif, la perte) par G, et la surprise potentielle par y, l'attirance sera une fonction $\varphi\ (G,\ y)$, dont les remarques précédentes fixent l'allure générale, et dont la forme précise est caractéristique de la psychologie de l'agent.

Comment, à partir de ces notions, se forme la décision ? A chacune des différentes décisions envisageables sont attachés divers événements futurs i, caractérisés par leur gain (ou leur perte) G_i, leur degré de surprise potentielle y_i et leur attirance $\varphi\ (G_i,\ y_i)$. Mais de cet ensemble, peut être fort grand, d'événements possibles, l'agent n'en retiendra que deux, qui accapareront son attention, et que pour cette raison Shackle appelle les éléments focaux : ce seront l'événement porteur d'un gain positif dont l'attirance φ est la plus forte, et l'élément porteur d'une perte dont l'attirance est la plus forte; soit ceux qui réalisent :

$$\underset{i,\ G_i > 0}{\text{Max}}\ \varphi\ (G_i,\ y_i)$$

$$\underset{i,\ G_i < 0;}{\text{Max}}\ \varphi\ (G_i,\ y_i)$$

ainsi à chaque décision possible seront associés dans l'esprit de l'agent deux éléments focaux représentatifs, l'un d'un gain, l'autre d'une perte; soient g, y_g les gain et surprise potentielle relatifs au gain focal, et l, y_l ceux relatifs à la perte focale. Ces éléments synthétisent l'appréciation de l'agent sur la décision en cause.

Pour choisir entre plusieurs décisions possibles, l'agent comparera leurs éléments focaux respectifs et choisira la décision dont les éléments focaux sont pour lui les plus favorables. Shackle explicite d'ailleurs la manière dont se fera cette comparaison :

Aux éléments focaux de chaque décision possible, sont associés des gains et pertes standards g_s et l_s, qui vérifient

$$\varphi\ (g,\ y_g) = \varphi\ (g_s,\ 0)$$

et

$$\varphi\ (l,\ y_1) = \varphi\ (l_s,\ 0);$$

[1] Cette « attirance » pour l'esprit sera d'ailleurs une répulsion pour la volonté, dans le cas d'évènements désagréables.

ce sont en somme les pertes et gains qui, associés à une surprise potentielle nulle, attireraient de la même manière l'attention de l'agent.

Chaque décision est alors représentée, non plus par quatre nombres (g, y_g, l, y_l) mais par deux (g_s, l_s). Le choix entre les différentes décisions, c'est-à-dire entre les différents couples de gains standards (g_s, l_s), s'effectue sur la base de la « carte d'indifférence » de l'individu; c'est un graphique portant en abscisse les gains g_s, en ordonnées les pertes l_s, et sur lequel sont tracées les courbes d'égale satisfaction de l'individu; finalement, à chaque décision sont associés d'abord un gain et une perte standard g_s et l_s, puis par l'intermédiaire de g_s et l_s une courbe de satisfaction de la carte d'indifférence. La décision finalement retenue sera celle qui correspond à la courbe de satisfaction la plus forte.

On ne peut méconnaître l'attrait de cette théorie qui se fonde sur une analyse introspective des mécanismes mentaux des agents, et qui retient, semble-t-il, deux caractéristiques fort importantes de ces mécanismes mentaux : l'impossibilité de prendre en compte des calculs compliqués (d'où l'abandon de la probabilité subjective, aux propriétés trop fines), et la nécessité de ramener à un très petit nombre l'éventail des éventualités (d'où la synthèse des évolutions futures possibles en deux gains focaux).

Il n'y a malheureusement pas eu, semble-t-il, de vérifications expérimentales sur la conformité de ce schéma avec les faits. Ceci est fort regrettable car, sur ce sujet comme sur beaucoup d'autres, seule la confrontation avec la réalité peut permettre de trancher, et d'avancer notre connaissance.

2 - UNE ANALYSE DES PROJECTIONS A COURT TERME DES AGENTS ÉCONOMIQUES

Une des lacunes déjà recensée de la théorie de la décision est qu'elle explicite bien ce qu'il faut faire quand on s'est fixé le cadre de l'avenir, mais elle ne dit pas du tout comment on détermine ce cadre. C'est tout le problème de la prévision, qui est indispensable pour une conduite avisée, mais sur l'origine de laquelle la théorie n'apprend que peu de choses. Certes, les modèles théoriques, notamment les modèles explicatifs des cycles, comportent des hypothèses plus ou moins clairement exprimées sur la manière dont les agents économiques fondent leurs prévisions. C'est ainsi que dans le modèle de l'accélérateur, Samuelson suppose implicitement que les chefs d'entreprise s'attendent à une continuation de la demande antérieurement exprimée. On peut toutefois penser que sur ce point l'analyse est en général insuffisante, en raison principalement de l'absence de vérifications concrètes des postulats émis à ce sujet. C'est cette lacune qu'il paraît important de combler puisque la méconnaissance des lois de formation des prévisions apparaît comme un obstacle au développement en économie

des applications des théories de la décision. Il n'est évidemment pas dans notre propos de traiter le problème dans toute sa généralité, nous voudrions simplement ici poser quelques jalons pour l'analyse des prévisions à court terme des agents économiques.

Mais les prévisions ne sont pas gratuites, elles ne constituent qu'un jalon dans le mécanisme de prise de décision; quelle place y tiennent-elles, et ce mécanisme d'ensemble jest-il conforme à ce que commanderait la théorie de la décision ?

C'est à chacun de ces points que seront consacrés les deux paragraphes qui suivent.

1) La formation des prévisions

Tout d'abord, pourquoi étudier le mode de formation des prévisions, et même peut-on parler de leur mode de formation ? Il est certain que si les prévisions étaient exactes, ces problèmes seraient sans objet; les agents économiques arriveraient alors à se faire une idée parfaite du futur, par des moyens qu'il serait certes intéressant de mettre à jour, mais dont la connaisance ne serait pas d'une grande utilité pratique, puisque ces prévisions seraient parfaites et non entachées d'erreurs. Là où il devient intéressant d'analyser le mode de formation des prévisions, c'est quand elles ne sont pas exactes; on peut espérer alors, en scrutant leur origine, trouver la manière dont il faudrait les modifier pour les rendre plus justes et, par l'analyse des sources d'erreurs systématiques qu'elles comportent, mettre à jour certains aspects de la psychologie des agents économiques. Or, c'est un fait sur lequel il est à peine besoin d'insister tant il est connu, les prévisions sont en général loin d'être parfaites. H. Theil [1] l'a bien montré en étudiant les prévisions macroéconomiques des organismes centraux de planification de différents pays, Hollande et pays Nordiques, et les perspectives qu'établissent les agents économiques, industriels ou consommateurs, pour les données microéconomiques qui les concernent.

Une autre question préliminaire se pose, et a trait à la notion même de prévision, qui englobe en fait sous un seul terme un ensemble de réalités fort diverses.

Un premier type de distinction trouve son origine dans la considération suivante : les prévisions ont souvent pour objet un élément sur lequel le prévisionniste n'est pas sans action : c'est ainsi qu'un chef d'entreprise déclarant que ses prix vont monter dans les mois qui viennent, fait part peut-être autant, sinon plus, d'une décision que d'une prévision pure.

Par contre, un individu qui émet des prévisions sur le niveau qu'atteindra le Produit National Brut l'année prochaine, traite d'une matière sur laquelle il n'a guère d'action possible. Il y a évidemment toute une gradation entre

[1] H. Theil : Economic Forecasts and Policy (1961).

ce dernier cas et celui, extrême aussi, de la décision ferme que rien ne pourra modifier, et que l'on fera aboutir coûte que coûte; mais, pour simplifier, il n'est pas sans intérêt d'opposer la prévision à la décision; entre ces deux pôles se situent toutes les situations où le prévisionniste est, en partie au moins, maître de la matière qu'il traite.

Une autre classification se trouve dans la séparation entre prévision inconditionnelle et prévision conditionnelle. La prévision conditionnelle sera celle qui est sous la dépendance d'événements à venir, par exemple « les importations françaises augmenteront de 9 % l'année prochaine si les prix montent à ce rythme » ou bien « j'augmenterai ma production si la demande qui m'est adressée augmente ». Par contre, la prévision inconditionnelle est émise indépendamment de tout phénomène ultérieur éventuel, elle s'impose comme une donnée à l'esprit du prévisionniste; ce sera la prévision d'un phénomène qu'il n'a pas relié à d'autres événements futurs, pour lequel il n'a pas mis en évidence de causalité autre que dans les régularités observables dans le passé. Le cas typique en est la prévision par un commerçant de la demande qui va lui être adressée; certes, aucune prévision n'est purement inconditionnelle; toutefois, elle peut être fondée sur des éléments que la théorie, qui par nature simplifie, ne prendra pas en compte et dans cette optique, elle apparaîtra effectivement telle.

Il n'est pas sans intérêt d'ailleurs de combiner les deux critères; on parlera alors de prévision inconditionnelle et de prévision conditionnelle, de décision conditionnelle et de décision inconditionnelle, chacun de ces éléments ayant d'ailleurs une place particulière dans le mécanisme décisionnel : ainsi, les prévisions inconditionnelles permettront l'élaboration de prévisions conditionnelles; l'ensemble des prévisions, combiné avec le but ultime que s'est fixé l'agent, aboutira à une décision d'action sur les variables stratégiques, décision qui, selon les circonstances, pourra être conditionnelle, c'est-à-dire revisable, ou inconditionnelle, non susceptible de retouches.

Examinons maintenant la formation des prévisions proprement dites. Les distinctions précédentes montrent que ce problème présente deux aspects bien différents selon qu'il s'agit de prévisions conditionnelles ou inconditionnelles. Le plus spécifique est celui des prévisions inconditionnelles : là, l'agent ne peut compter que sur l'évolution passée du phénomène et la situation actuelle; comment intègrera-t-il les deux pour se faire une idée de ce que sera un futur forcément aléatoire ? Le flair et l'intuition jouent ici un grand rôle; certains individus abondamment pourvus de ces qualités se révèlent excellents prophètes alors que d'autres munis des mêmes renseignements n'en tirent que des prévisions médiocres.

Comparé à ce problème, celui de la détermination des prévisions conditionnelles apparaît de prime abord relativement simple : on étudie dans le passé la loi qui a gouverné le phénomène qu'on veut projeter dans le futur et on utilise cette loi pour la projection en substituant aux variables causales

non encore réalisées leur prévision. C'est ainsi que l'évolution des prix de vente étant pour la plus grande part déterminée par celle des coûts selon une loi du type :

(1) prix de vente $= a_1$ (coût des matières) $+ a_2$ (coût de la main-d'œuvre),

la prévision de l'évolution des prix de vente sera fort simple à faire, dès que l'on a émis des perspectives pour le coût des matières et celui de la main-d'œuvre : il suffit alors d'appliquer la relation (1).

C'est pourquoi les schémas proposés pour l'explication des prévisions ont pour objet principal l'étude des prévisions inconditionnelles, celles pour lesquelles le problème est le plus spécifique.

Celles-ci sont fondées principalement, on l'a vu, sur l'observation de l'évolution passée du phénomène; c'est donc très logiquement que les différents auteurs se sont attachés à spécifier la nature de ce lien.

C'est ainsi que Hicks (1) propose le concept d'élasticité d'anticipation. Pour lui, la caractéristique d'un individu qui fait des prévisions, c'est son élasticité d'anticipation :

$$e = \frac{P_{t+1} - R_t}{R_t} : \frac{R_t - R_{t-1}}{R_{t-1}}$$

où P_{t-1} désigne la prévision faite pour la période $t + 1$ à l'instant t; R_t et R_{t-1} étant les quantités constatées en t et en $t - 1$.

Si l'élasticité d'anticipation est nulle, c'est que l'agent estime que le niveau actuellement observé restera inchangé. Si elle est positive, il jugera que la tendance précédente va se maintenir et se renverser si elle est négative.

Ainsi, pour Hicks, l'évolution prévue est dans un rapport constant avec l'évolution passée et ne dépend que d'elle. Ce point de vue théorique est évidemment restrictif, et nous verrons ultérieurement une autre théorie dégagée de cette hypothèse. Mais, pour le moment, le point important est d'examiner quelles valeurs peuvent être assignées à l'élasticité d'anticipation e. Deux auteurs se sont particulièrement attachés à l'étude pratique du lien existant entre le changement prévu pour une période future et le changement qui vient d'être constaté.

F. Modigliani (2) se fonde sur les résultats de certaines enquêtes de conjonctures américaines, dans lesquelles sont posées aux chefs d'entreprises, des questions concernant le niveau qu'atteindront leurs ventes, leur production, etc. dans quatre mois, par rapport aux niveaux de ces mêmes quantités l'année précédente; on constate alors d'une manière générale que les réponses sont optimistes quand la tendance antérieure était à la

(1) J.R. Hicks : Valeur et Capital. (Dunod, 1968)

(2) F. Modigliani : Regressiveness in business survey expectations (1962).
J. Bossons et F. Modigliani : On the reasonableness of regressive expectations (1963).

baisse, et pessimistes dans le cas contraire; les réponses obéissent à l'un des deux schémas suivants (fig. 8-2).

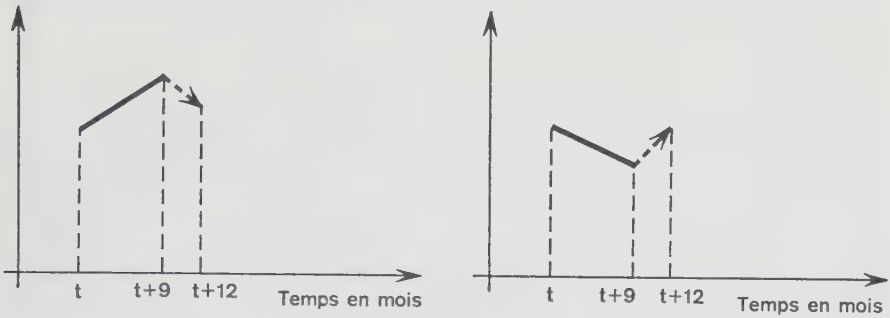

Fig. 8-2.

Il semble, d'après cela, que l'élasticité d'anticipation soit négative, puisqu'à une évolution antérieure favorable, les agents pensent que va succéder une phase prospère, et inversement; et Modigliani donne à ce comportement une explication séduisante : d'après lui, les mouvements que subissent par exemple les ventes évoluent de la manière suivante : autour d'une tendance à long terme, en général croissante, mais de toute façon relativement peu sensible sur une période de temps aussi courte que l'année, les ventes enregistrent des oscillations de courte période, à caractère transitoire, dont les causes ont un certain aspect aléatoire; il est donc normal que, si les entrepreneurs ont eu une période de forte activité qui les place au-dessus de la tendance à long terme, ils pensent que bientôt ce « boom » passager va se tasser et qu'ils reviendront sur cette tendance à long terme, donc que leur activité va diminuer (fig. 8-3).

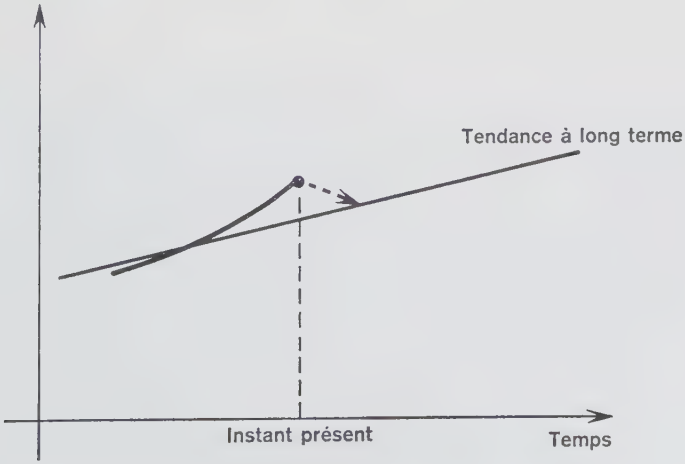

Fig. 8-3.

On ne peut méconnaître le puissant attrait de cette théorie. Une objection de fait peut toutefois lui être présentée, qui tient à la nature très particulière des données à partir desquelles ce résultat est mis en évidence. En effet, pour une enquête faite en juin, par exemple, ce qui est demandé, ce n'est pas la tendance prévue de juin à septembre, mais la tendance prévue du mois de septembre de l'année dernière jusqu'au mois de septembre de cette année. Il ne s'agit donc pas d'une prévision sur trois mois, mais d'une prévision sur 12 mois, dont les 9 premiers sont déjà connus. Cette formulation de la question posée tient à une raison bien simple : elle permet à l'agent de faire abstraction des mouvements saisonniers qui risqueraient de perturber sa réponse si la période de prévision proposée était plus courte que l'année. Elle présente toutefois quelques dangers; en particulier un bon nombre de chefs d'entreprises seront tentés de déclarer que le niveau ne se sera pas modifié depuis un an, pour des raisons de facilité ou à cause d'une certaine incertitude; si, en fait, les ventes ont changé depuis 9 mois, alors automatiquement apparaîtra pour les trois derniers mois une tendance prévue différente de la tendance antérieure (fig. 8-4).

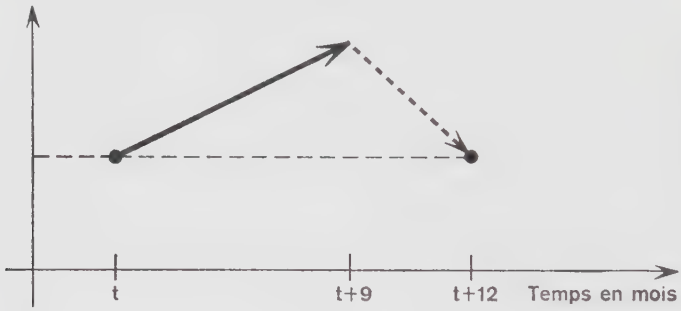

FIG. 8-4.

D'autres faits pourraient être invoqués à l'encontre de cette explication; ils constitueraient alors une justification de la thèse soutenue par H. Theil selon laquelle les prévisions sont caractérisées par l'extrapolation de la tendance récente et l'habitude de sous-estimer les changements. H. Theil s'appuie sur un bien plus grand nombre d'observations : il analyse d'abord les prévisions macroéconomiques faites annuellement depuis la guerre sur les agrégats de Comptabilité Nationale en Hollande et dans les pays Nordiques; il reprend également les résultats des tests conjoncturels hollandais et allemands et d'enquêtes de tendance américaine. La conclusion à laquelle il arrive est que les chefs d'entreprise ont une tendance très nette à extrapoler dans leur vision du futur l'évolution récente : si celle-ci était favorable, ils restent optimistes pour le futur; si elle était défavorable, leurs perspectives sont pessimistes. Ceci est particulièrement mis en évidence par des régressions

à deux variables, dans lesquelles le changement prévu en $t - 1$ pour la période $(t - 1, t)$, p_t, est rapproché à la fois du changement qui vient d'être constaté r_{t-1}, et du changement qu'on observera ultérieurement r_t :

$$p_t = a\, r_{t-1} + b\, r_t.$$

Une prévision parfaite conduirait à : $b = 1$; $a = 0$. En fait, H. Theil constate très généralement que a est positif et b inférieur à 1 ; ce qui montre bien que les prévisions se fondent trop exclusivement sur l'évolution passée t_{t-1}. En terme d'élasticité d'anticipation, celle-ci est positive.

Enfin, comparant les quantités $p_t - r_{t-1}$, et $r_t - r_{t-1}$, il constate que celles-ci sont la plupart du temps de même signe, ce qui montre que le sens des changements est correctement prévu; mais néanmoins, la quantité $(p_t - r_{t-1})$ est en général plus faible que $(r_t - r_{t-1})$, ce qui met en évidence le fait que l'amplitude des changements est très souvent sous-estimée.

Theil apporte pour la justification de ces résultats de nombreuses autres vérifications toutes concordantes; il constate en particulier, en décomposant l'erreur de prévision moyenne en trois termes :

$$\frac{1}{n} \Sigma\, (p_t - r_t)^2 = (\bar{p} - \bar{r})^2 + (s_p - s_r)^2 + 2\,(1 - \rho)\, s_p\, s_r$$

où $\bar{p}$ et $\bar{r}$ sont les moyennes, s_p, s_r les variances, et ρ la corrélation entre p et r que, en général, les deux premiers termes $\bar{p} - \bar{r}$ et $s_p - s_r$ sont négatifs, ce qui montre bien la tendance à sous-estimer les changements : les tendances prévues sont en moyenne inférieures aux tendances réalisées, et elles sont également plus uniformes, moins dispersées d'une enquête à l'autre, que ce qu'elles devraient être. On peut donc accepter comme assez fermement établi le fait qu'à court terme, les chefs d'entreprises tendent à extrapoler la tendance récente et à sous-estimer les écarts qui vont se produire par rapport à cette tendance. L'élasticité d'anticipation de Hicks serait donc positive.

On peut toutefois s'étonner que les anticipations des agents ne dépendent que de la tendance immédiatement passée, c'est-à-dire du niveau actuel et du niveau juste antérieur de la grandeur en cause, alors qu'en fait, ces agents ont une mémoire qui enregistrent des faits beaucoup plus lointains.

Une hypothèse répond à cette remarque, c'est celle du lissage exponentiel, étudié par divers auteurs, en particulier Brown, Muth, G. Morlat et D. Bachelet; selon elle, le niveau p_t prévu pour la période future est liée aux niveaux présents et passés R_t, R_{t-1}, ... R_{t-n}, par la relation :

$$(1) \qquad P_{t+1} = (1 - a)\,(R_t + a\, R_{t-1} + a^2\, R_{t-2} + \ldots + a^n\, R_{t-n} + \ldots).$$

En somme, pour établir sa prévision, l'agent économique prend en considération tout ce qu'il a constaté dans le passé, mais en donnant un poids

décroissant aux événements les plus lointains. La relation (1) peut d'ailleurs être récrite d'une autre manière; en remarquant que :

$$P_t = (1 - a)\,(R_{t-1} + a\,R_{t-2} + \ldots + a^{n-1}\,R_{t-n} + \ldots)$$

on aboutit à :

$$P_{t+1} = (1 - a)\,R_t + a\,P_t$$

ou

$$P_{t+1} - P_t = (1 - a)\,(R_t - P_t),$$

sous cette forme, on voit que les agents modifient leur prévision antérieure P_t d'une fraction $(1 - a)$ de l'écart entre ces prévisions antérieures P_t et les réalisations auxquelles elles ont donné lieu R_t.

Le coefficient $(1 - a)$ est donc à rapprocher formellement du coefficient d'anticipation de Hicks e;

en effet :

$$e = \frac{\dfrac{P_{t+1} - R_t}{R_t}}{\dfrac{R_t - R_{t-1}}{R_{t-1}}}$$

et en général :

$$e \simeq \frac{P_{t+1} - R_t}{R_t - R_{t-1}}$$

alors que :

$$1 - a = \frac{P_{t+1} - P_t}{R_t - P_t}\,;$$

de nombreux auteurs se sont attachés à montrer le caractère optimal d'une telle prévision. En particulier G. Morlat et D. Bachelet [1] ont démontré que la meilleure prévision d'un phénomène x_t obéissant à un modèle à deux aléas du type :

$$x_t = y_t + u_t$$

$$y_t = y_{t-1} + m + v_t$$

devait être établie à partir d'un lissage exponentiel.

Mais il ne semble pas qu'on se soit attaché à vérifier si les prévisions réelles des agents économiques obéissaient à une telle loi, bien qu'une théorie ayant reçu des vérifications expérimentales puisse être rattachée à la prévision par lissage exponentiel; c'est celle du revenu permanent, élaborée par M. Friedman à propos de l'étude de la fonction de consommation, et dont il a déjà été question ici.

[1] G. Morlat et D. Bachelet, *op. cit.*

Selon elle, le lien entre consommation et revenu est à rechercher, non au plan des grandeurs observées, mais au plan des valeurs normales, susceptibles de continuer pour l'avenir, que les agents attendent pour ces deux quantités. La valeur normale du revenu, le revenu permanent est lié aux valeurs antérieures du revenu de l'agent, et le revenu réel en diffèrera par une partie transitoire due à des événements aléatoires anormaux :

$$R = R_p + R_t.$$

Se fondant sur le revenu normal R_p, les agents établissent des plans de consommation auxquels correspond la consommation permanente C_p.

$$R_p = a\, R_p.$$

En fait, des événements imprévus feront que la consommation réelle diffèrera de la consommation prévue, et ce, d'une fraction « transitoire » :

$$C = C_p + C_t.$$

Donc, le lien entre consommation et revenu est de la forme :

$$C = a\, R_p + C_t$$

et pour M. Friedmann, le revenu permanent R_p, celui qui est jugé normal par les agents dépend de l'ensemble des revenus antérieurement perçus :

$$R_p\,(t) = \lambda,\, R\,(t) + \ldots + \lambda_n\, R\,(t - n - 1) + \ldots$$

les λ_n étant des nombres positifs décroissants; on peut d'ailleurs particulariser la décroissance de ces coefficients avec l'hypothèse :

$$\lambda_n = k\, \mu^n$$

alors :

$$(1) \qquad R_p\,(t) = K\,[\mu\, R\,(t) + \ldots + \mu^n\, R\,(t - n - 1) + \ldots].$$

On retrouve donc là, sous une forme détournée, l'hypothèse du lissage exponentiel, puisque les niveaux permanents sont ceux qui sont susceptibles de se maintenir à la période suivante, et constituent donc en quelque sorte une prévision du revenu futur, à un terme de tendance constant près; cette hypothèse peut être testée indirectement dans le cas de la fonction de consommation, car, si l'on ne dispose pas d'enquêtes fournissant le revenu jugé normal par les agents économiques, on peut néanmoins, a posteriori, contrôler si le lien qui s'en déduit entre consommation et revenu :

$$(2) \qquad C\,(t) = a\, k\,[\mu\, R\,(t) + \ldots + \mu^n\, R\,(t - n - 1) + \ldots] + C_t$$

est correct.

La relation (2) peut s'écrire pour la période $t - 1$:

$$C\,(t - 1) = a\, k\,(\mu\, R\,(t - 1) + \ldots + \mu^{n-1}\, R\,(t - n - 1) + \ldots) + C_{t-1}.$$

On en déduit facilement qu'il existe une relation linéaire entre $C(t)$ d'une part et $C(t-1)$ et $R(t)$ d'autre part :

$$C(t) = \alpha\, C(t-1) + \beta\, R(t) + n_t.$$

Cette régression, testée sur des données annuelles dans le cas de la France, fournit des résultats tout à fait remarquables, puisque le coefficient de corrélation en est de 0,999 [1].

Les diverses théories précédentes constituent des jalons précieux pour l'élaboration d'une théorie générale de la formation des prévisions. Elles présentent toutefois l'inconvénient d'être, apparemment tout au moins, difficilement conciliables.

C'est ainsi que le lissage exponentiel suppose que la prévision s'établit à partir de l'ensemble de ce qui a été constaté dans le passé, alors que la notion d'élasticité d'anticipation ne fait intervenir que le passé récent.

Elles laissent en outre sur sa soif celui qui cherche une représentation complète du mécanisme de formation des prévisions. Prenons par exemple la formule du lissage exponentiel : on peut douter qu'un agent économique établisse ses prévisions d'une manière aussi mécanique; certes, l'expérience passée du phénomène jouera un rôle, et il est normal que ce rôle aille en diminuant au fur et à mesure qu'il s'agit d'un passé plus lointain, mais sera-t-il seul à jouer ? Est-ce que l'agent n'a pas, de la plupart des quantités futures qu'on lui demande de prévoir, une préconnaissance tenant à une certaine intuition, aux informations qu'il a sur les projets de tel ou tel individu, de tel ou tel organisme, aux renseignements les plus récents qu'il possède sur la situation actuelle et ses prolongements immédiats ? C'est ainsi que le chef d'entreprise qui a à prévoir la demande qui lui sera adressée par ses clients, tiendra compte évidemment de la demande qu'il a reçue dans le passé, sous une forme que l'expérience pourrait bien révéler être celle du lissage exponentiel; mais, en dehors de cet aspect mécanique, machinal, il a des contacts fréquents avec ses représentants et ses clients; il connaît les opinions des uns et les projets particuliers des autres; il doit donc quand même avoir, sur ce que sera le futur, une idée plus précise que celle que lui fournit la stricte observation objective du passé, et il serait bien improbable qu'il n'en tienne pas compte dans sa prévision.

C'est bien d'ailleurs ce que l'on sait, à la suite des travaux déjà mentionnés de H. Theil; cet auteur conclut de ses études que les agents, s'ils s'appuient lourdement sur le passé, n'en prévoient pas moins assez correctement le sens des divergences avec ce passé : c'est donc qu'ils prennent en compte cette connaissance intuitive, subjective et imprécise qu'on a toujours de ce que sera le futur; mais évidemment, cette connaissance reste vague, ce qui explique que si le sens des écarts passé-futur est en général

[1] G. Vangrevelinghe : Une fonction de consommation pour la France (1965).

bien ressenti, leur intensité l'est plus mal, en général à cause d'une sous-estimation de ces écarts.

On peut toutefois reprocher à ces études d'être essentiellement descriptives et pas assez explicatives; si elles constatent le phénomène a posteriori, elles ne montrent pas son mécanisme de formation.

Pour saisir ce mécanisme, il est nécessaire de se dégager des constatations expérimentales, et de réfléchir, sur le plan théorique, à la manière dont s'élaborent dans l'esprit du prévisionniste les projections futures (1).

Le point de départ de cette réflexion sera l'analogie entre mesures et prévisions; les mesures présentent différents degrés de qualité, auxquels les ingénieurs sont bien sensibles : prenons par exemple le cas de la mesure d'une longueur; on peut, par les procédés optiques modernes, obtenir une précision aussi grande qu'on le désire; si on est moins exigeant, on se contentera d'utiliser un étalon en invar; à un stade plus grossier, le mètre en tissu de la couturière fera l'affaire; enfin, si l'on est pressé ou si l'on ne dispose d'aucun de ces instruments, on se limitera à une estimation au jugé, fondée sur l'expérience acquise dans le passé; et il est symptomatique à cet égard que le même mot « expérience » soit utilisé à la fois pour la plus fine et pour la plus grossière de ces opérations : dans le premier cas, le résultat sera fondé sur *une* expérience, dans le deuxième, il le sera sur *l'*expérience.

La prévision économique est, elle aussi, établie à partir de l'expérience passée de l'agent, une expérience qui peut également revêtir divers degrés, allant de la simple intuition à l'application d'un modèle mathématique complexe qui s'est, jusqu'ici, révélé adéquat. En un sens donc, la prévision n'est qu'un cas extrême de mesure.

Mais ce type de mesure présente une particularité étrange, c'est que le phénomène que l'on veut mesurer n'existe pas, ou tout au moins pas encore. Cette circonstance est susceptible, semble-t-il d'introduire une différence fondamentale dans les liens qui unissent la mesure physique et le mesuré d'une part, la prévision et son objet d'autre part.

En physique, mis à part les erreurs systématiques (2) dont nous ferons provisoirement abstraction, la relation entre mesure p et mesuré r est du type :

$$p = r + u$$

u étant un écart de moyenne nulle dû à des causes aléatoires diverses, dont la composition constitue le hasard.

(1) L'auteur reprend, pour la fin de ce paragraphe, une étude intitulée « Prévision et Mesure » qu'il fit paraître en 1967 dans la *Revue d'Economie Politique*. Il exprime sa gratitude envers MM. Méraud et Morlat, pour les avis et conseils précieux qu'ils lui ont prodigué à l'occasion de ce travail.

(2) Tenant par exemple au fait que le mètre est faux, et que chacune de ses divisions est, non pas de 1 cm, mais de 1,01 cm.

En somme, la mesure est égale à la réalité, à un aléa près; ou, pour parler en terme causal, la mesure est déterminée par le mesuré, à un aléa indépendant près.

Il n'est guère possible de maintenir cette position dans le cas de la prévision : on ne peut en effet dire que celle-ci est déterminée par la réalité puisque cette dernière lui est postérieure; affirmer à l'inverse que la réalité est déterminée par la prévision, selon un schéma du type :

$$r = p + v$$

reviendrait à supposer que c'est la prévision qui détermine la réalité ultérieure, ce qui, semble-t-il, ne peut se produire que si la prévision est en fait une décision autoritaire irrévocable.

Pour trouver un schéma satisfaisant du lien entre prévision et réalité, il convient d'analyser la manière dont naissent ces prévisions; pour les établir, les agents sont amenés à recenser les causes probables, les racines, de la réalité ultérieure, et c'est à la façon dont ils auront su mener à bien cette recherche que se jugera, après coup, la qualité de leur prévision; quelle que soit celle-ci, et à des degrés divers, des divergences apparaîtront; certains facteurs n'auront pas pu, par leur nature même, être prévus, ou auront été oubliés par erreur; d'autres auront été intégrés dans la prévision, alors qu'en fait, ils n'ont joué aucun rôle; il y a donc en quelque sorte un noyau commun aux prévisions et à la réalité; le poids de ce noyau commun sera plus ou moins grand selon la qualité des prévisions; mais on nepeut pas dire que les prévisions comprennent la réalité plus autre chose, ni que la réalité corresponde à la prévision plus autre chose; en fait, les deux se recouvrent partiellement. En termes mathématiques, si C représente la valeur de ce noyau, de ces facteurs communs, qui constituent en somme la partie correcte de la prévision, on aura :

$$p = C + u$$

$$r = C + v$$

u et v étant des aléas indépendants de moyennes nulles, et sans corrélation avec C.

Jusqu'ici il a été fait abstraction des erreurs systématiques; celles-ci se rencontrent quand les agents ont, par exemple, l'habitude de sous-estimer les changements, ou d'être optimistes dans leur prévision. On introduira ici des erreurs systématiques sous la forme la plus simple, par l'intervention dans la première relation de deux paramètres numériques a et b, le modèle complet sera alors

$$p = a\,C + b + u$$

$$r = \quad C + v \tag{1}$$

Les coefficients a et b sont des caractéristiques du comportement de l'agent considéré. Ils rendent compte de ses travers, de ses mauvaises habitudes, dans la mesure où a est différent de l'unité et où b n'est pas nul.

Comment, à partir de séries statistiques de prévisions et de réalisations, juger de la validité du modèle envisagé, et comment en tester les paramètres ?

On se limitera pour cela à la situation où les prévisions concernent des taux de changement, et non des niveaux. C'est à cette situation que correspondent les données qui vont être utilisées; c'est elle, au surplus, semble-t-il, qui est la plus intéressante pour l'économiste. Cela n'implique cependant pas que le modèle (1) ne serait pas valable quand les prévisions portent sur des niveaux; mais alors la signification et la valeur numérique des paramètres a et b seraient très probablement différentes.

La manière la plus efficace, pour répondre à la question précédente, serait certainement d'exhiber la variable C, et de montrer que p, r et C sont bien liés par les relations proposées. Mais cette voie apparaît très délicate, car évidemment C recouvre un ensemble de facteurs fort complexes à démêler, surtout quand l'information dont on dispose est limitée à la connaissance de la série des prévisions et de celle des réalisations, ce qui est en général le cas.

Si, dans ces conditions, il devient illusoire de vouloir définir la nature exacte de C, il n'est toutefois pas interdit d'en rechercher un succédané; de manière plus précise on peut penser que C est bien corrélé avec les réalisations de la période antérieure; ceci sera vérifié chaque fois que la succession des événements présente une certaine continuité, et que cette continuité est ressentie par le prévisionniste. Avec l'hypothèse supplémentaire que les réalisations antérieures sont sans liens avec u et v, hypothèse qui, compte tenu de la signification concrète de u et de v, n'a rien d'exorbitant, on peut obtenir une estimation convergente des paramètres a et b par les quantités

$$\widehat{a} = \frac{\Sigma\, P_t\, R_{t-1}}{\Sigma\, R_t\, R_{t-1}}$$

et

$$\widehat{b} = \frac{1}{n}\,(\Sigma\, p_t - \widehat{a}\, \Sigma\, r_t)$$

expressions dans lesquelles l'indice t représente la période (il y a n périodes), et les lettres majuscules sont les correspondantes centrées des minuscules.

On aura reconnu là la procédure d'estimation par variable instrumentale d'un modèle à erreur sur les inconnues, la variable instrumentale étant ici r_{t-1}; la qualité des estimations est assez médiocre car elle dépend étroitement de la corrélation entre r_t et r_{t-1}, qui en général reste faible pour les séries étudiées.

Les résultats numériques obtenus à partir de celles de ces séries pour lesquelles cette corrélation était suffisante, sont rassemblés dans le tableau ci-joint, où l'on a également fait figurer les estimations a^* et b^* de a et b qu'aurait données une simple régression :

$$p = a^* \quad r + b^*.$$

Estimations	Prévisions de demande pour 4 branches du test industriel français (Source INSEE)				Prévisions de trafic ferroviaire de marchandises aux U.S.A. (Source « the quality and économic significance of business anticipation datas »)
	Textile	Papier carton	Bois	Peaux et cuirs	
$\widehat{a}$	0,78	0,60	0,36	1,35	0,59
$\widehat{b}$ a^*	— 7 + 0,24	+ 0,5 0,32	+ 8,7 0,20	+ 3,3 0,40	+ 3,3 0,50
b^*	+ 10	+ 9	+ 19	+ 12	+ 4,5

Il ressort de ce tableau que, systématiquement $\widehat{a}$ est supérieur à a^*; cette circonstance est d'ailleurs tout à fait générale dans le cas d'erreurs sur les variables. Le terme constant de la régression simple surestime la vraie constante, et le coefficient de régression sous-estime le coefficient a, comme le suggère la figure 8-5, où l'on a indiqué le nuage des points observés, d'allure elliptique, la droite de régression, et la droite dont les paramètres sont les vrais coefficients a et b; cette dernière droite est plus proche de l'axe de symétrie de l'ellipse.

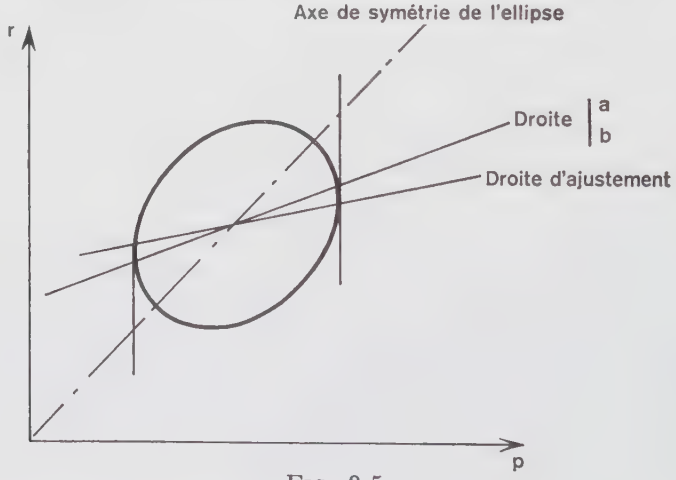

Fig. 8-5.

On est donc conduit à penser que s'il y a un biais de prévision — qui va dans le sens de la sous-estimation, puisque $\widehat{a} < 1$ — ce biais est peut-être plus faible que ce que laisserait apparaître la seule régression simple.

Nous disons « peut-être » car les hypothèses mises en jeu pour estimer a et b sont trop restrictives pour qu'on puisse être assuré de leur validité, et surtout il n'y a pas eu de véritable test du modèle. Pour ce dernier objectif, il faudrait d'abord estimer les variances de u et v, ce qui est d'ailleurs tout à fait possible. On pourrait alors tester le modèle proposé, non pas évidemment en lui-même, dans l'absolu, mais contre certaines hypothèses alternatives bien définies; or, parmi ces hypothèses alternatives, les deux plus naturelles sont celles qui consistent à supposer que σu, ou σv, est nul, c'est-à-dire que le lien prévision-réalisation est de la forme

$$p = \alpha r + \beta + \omega ,$$

ou :

$$r = \alpha' p + \beta' + \omega'$$

les constantes psychologiques de l'individu, le biais systématique de prévision, seraient alors α et β (ou α' et β').

Mais il est impossible de discriminer entre le modèle proposé et l'une ou l'autre des deux régressions simples.

En effet, le couple (p, r) de variables aléatoires gaussiennes peut être décrit sous une infinité de formes toutes équivalentes

$$p = \lambda x + \mu + u$$
$$r = x \qquad + v$$

où x, u et v sont des variables gaussiennes indépendantes et λ et μ des paramètres; il suffit de se fixer λ et connaissant le couple aléatoire (p, r) toutes les autres caractéristiques en découlent. Deux de ces formes sont des régressions simples, quand σu ou σv sont nuls; les autres sont conformes au modèle proposé. La méthode des variables instrumentales permet de lever cette indétermination et de choisir la structure pour laquelle $\lambda = \widehat{a}$, mais d'un point de vue probabiliste il y a parfaite identité entre cette dernière structure et l'une ou l'autre des deux régressions simples.

Ainsi, à défaut de découvrir la nature concrète, l'expression physique du facteur C — ce qui justifierait a priori le modèle — il faut, pour rechercher la validité des hypothèses faites, s'orienter vers une autre direction.

Comme on l'a vu, les paramètres ont une signification psychologique, ils caractérisent le comportement du prévisionniste; on doit donc s'attendre à ce qu'ils aient la même valeur quand le même agent fournit des prévisions sur des sujets différents, ou encore quand il s'agit de prévisions émises par des agents différents, mais ayant les mêmes réactions, par exemple appartenant à la même catégorie socio-professionnelle. Si l'on dispose de plusieurs séries, 1..., i..., n, appartenant ainsi à une même classe, c'est-à-dire pour

lesquelles les paramètres a et b sont identiques, il devient alors possible d'estimer ces paramètres communs aux différentes séries, ainsi que les paramètres propres à chaque série i de la classe; ces derniers paramètres portent sur les variances de C, u et v, soit $\sigma^2 c_i$, $\sigma^2 u_i$, $\sigma^2 c_i$ et sur l'espérance de C soit $E(C_i)$. Il serait facile de voir en particulier que la méthode du maximum de vraisemblance s'applique (1); elle conduit à des estimations dont on peut calculer la variance. On pourrait alors tester si σu_i et σv_i sont significativement différents de zéro, c'est-à-dire rejeter ou accepter l'hypothèse qu'une régression simple représente correctement le phénomène (2). Les calculs numériques sont malheureusement d'une inextricable complication.

On peut toutefois, sans passer par la méthode du maximum de vraisemblance, atteindre les deux buts poursuivis, c'est-à-dire d'une part, tester l'hypothèse que σu_i et σv_i sont différents de zéro, d'autre part obtenir des estimations convergentes de a et b.

On verrait en effet facilement que pour les différentes séries d'une même classe il y a entre les paramètres

$$a,\ b,\ \sigma^2 c_i,\ \sigma^2 u_i,\ \sigma^2 v_i,\ E(C_i)$$

et les coefficients α_i, β_i et le coefficient de corrélation ρ_i des n régressions :

$$p_i = \alpha_i r_i + \beta_i,$$

les relations

$$\alpha_i = a - a \frac{\sigma^2 v_i}{\sigma^2 r_i}$$

et

$$\alpha_i = a \frac{a^2 + \rho^2 \dfrac{\sigma^2 v_i}{\sigma^2 u_i}}{a^2 + \dfrac{\sigma^2 v_i}{\sigma^2 u_i}}$$

L'existence, à l'intérieur de chaque classe, de corrélations généralement positives, mises en évidence sur la figure 8.6, entre

$$\alpha_i \quad \text{et} \quad -\frac{1}{\sigma^2 r_i}, \qquad \alpha_i \quad \text{et} \quad \rho^2{}_i$$

(1) Dans le cas où l'on ne dispose que d'une seule série, elle laisse subsister une indétermination (un des paramètres est arbitraire).

(2) On pourrait également comparer la structure définie par a, b, les $\sigma^2{}_{u_i}$, les $\sigma^2{}_{v_i}$, les $\sigma^2{}_{c_i}$ et les $E(C_i)$ au regard de celle constituée par les n régressions simples, une pour chaque série de la classe, calculées sans restrictions a priori sur les coefficients, et voir si ces deux structures sont significativement différentes ou non.

tend à montrer que

$$\sigma^2 v_i \neq 0,$$

car, dans le cas contraire, il n'y aurait pas de corrélation (1).

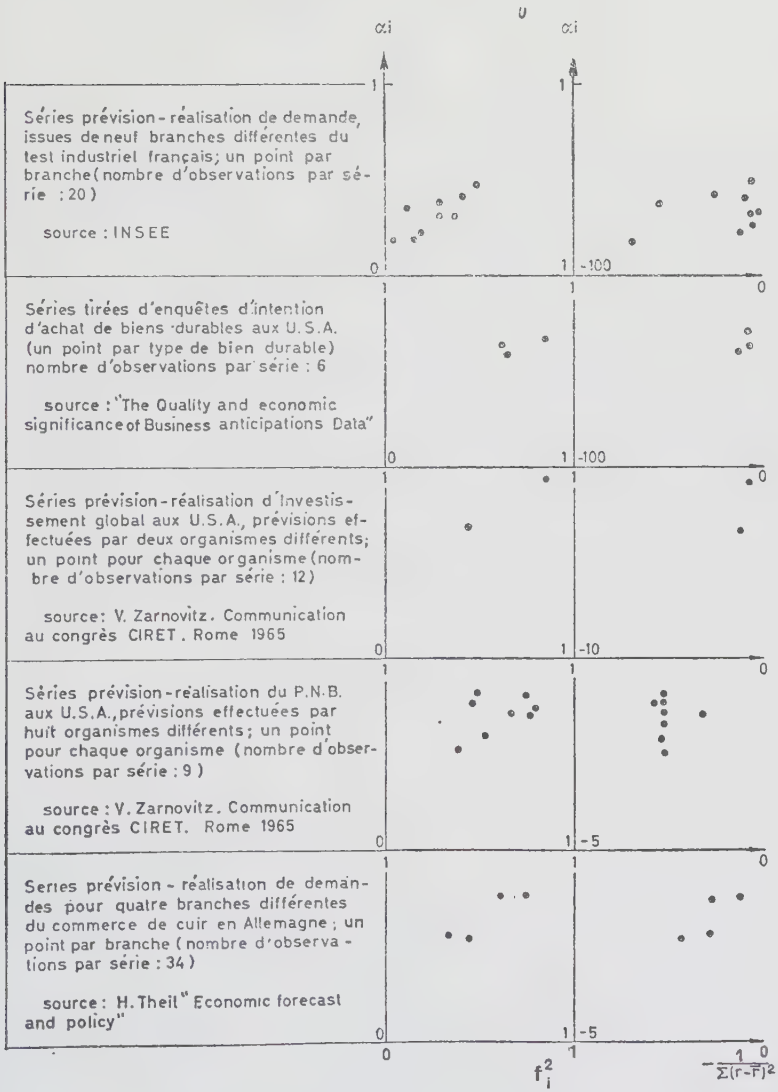

FIG. 8-6.

(1) Les mêmes calculs pouvant être faits pour $\sigma^2 u_i$ en invertissant p et r, et les conclusions sont analogues.

Ce test est certes loin d'être satisfaisant; en particulier on en ignore la puissance, mais il est assez parlant, car il traduit de manière plus élaborée le fait bien connu que l'existence d'erreurs sur les variables biaise les estimations α_i et β_i des paramètres vrais (α_i biaisé vers le bas, et β_i vers le haut) et ce, d'autant plus que la variance des erreurs est élevée. (C'est-à-dire « d'autant plus que

$$\frac{\sigma^2 v_i}{\sigma^2 r_i}$$

est élevé », ou « d'autant plus que le coefficient de corrélation est faible »).

On peut en outre calculer une estimation convergente de a et b : soit pour chacune des séries de la classe en cause, $\overline{p_i}$, $\overline{r_i}$, $\overline{u_i}$ et $\overline{v_i}$ les moyennes constatées de p_i, r_i, u_i et v_i. On a évidemment

$$\overline{p_i} = \overline{a r_i} + b + \overline{u_i} - \overline{a v_i}$$

quand, dans chaque série, le nombre d'observations tend vers l'infini, $\overline{u_i}$ et $\overline{v_i}$ tendent vers zéro, les points $(\overline{p_i}, \overline{r_i})$ viennent s'aligner sur une droite dont les paramètres sont a et b.

Cette méthode conduit, pour les classes dont les séries constituantes sont suffisamment longues, aux estimations suivantes :

Estimation de *a* et *b* à partir des moyennes de *p* et *r* de chaque série

Classe de séries	a	b
Test industriel français	0,75	— 2
Commerce allemand	0,75	+ 13
Prévisions du PNB aux U.S.A.	1,10	+ 5,0

On retrouve des valeurs de a assez élevées, voisines de celles obtenues successivement pour a, et sensiblement supérieures aux coefficients de régression de p sur r; de même, le terme constant est plus faible que ce que donne la régression simple.

***

La longueur de ces développements et la prudence des conclusions qui ont été tirées auront certainement fait sentir le caractère bien imparfait des solutions proposées, tant pour le test du modèle que pour l'estimation de ses paramètres. Tout ceci n'a donc rien de définitif et constitue plutôt

un point de départ, un appel; appel pour des recherches théoriques supplémentaires, appel aussi pour une information statistique plus abondante et plus complète.

Toutefois, en tirant toutes les conséquences des résultats qui précèdent, il n'est pas interdit, au risque de paraître audacieux, d'ébaucher une synthèse sur la formation des prévisions.

A un terme constant b, qui est peut-être dans une certaine mesure représentatif du trend, ou tout au moins de l'idée que s'en font les agents, se superpose une partie de bonne prévision, symbolisée par C, assez fortement appuyée sur l'expérience tirée de l'évolution récente, et une part d'erreur, de mauvaise intuition en quelque sorte représentée par u. La réalité ultérieure, assez différente de ce schéma, reprend en l'amplifiant la part correctement prévue, qui a été sous-estimée puisque a est inférieur à l'unité, et à cela s'ajoutent des éléments nouveaux, concrétisés par le terme v, qui n'avaient pas été saisis dans l'expression des prévisions, soit par insuffisance de ces dernières, soit en raison de l'apparition d'événements inattendus, imprévisibles par définition.

Ainsi, l'écart que l'on constate a posteriori entre prévision et réalisation apparaît comme la conjugaison de trois types d'erreurs de natures assez différentes : il y a tout d'abord un biais systématique, propre à l'agent, qui découle de son attitude psychologique, et qui se résume essentiellement en une sous-estimation des changements : ceci est certainement dû à un réflexe de prudence, à une crainte de se tromper; c'est une forme de réaction vis-à-vis de l'incertitude qui traduit peut-être un certain comportement adaptif : dans la prévision d'un niveau futur, le niveau que l'on vient de constater constitue la base la plus objective et pèse d'un poids important, attirant vers lui une prévision qui, d'après d'autres éléments, aurait tendance à s'en écarter : il en résulte que la tendance prévue sera en général sous-estimée. En outre, d'après les analyses statistiques précédentes, il semble que la sous-estimation systématique soit en général de l'ordre de 20 à 30 %, bien moins forte que celle que mettraient en évidence les régressions simples.

Il est à noter qu'un comportement adaptif de ce type peut également expliquer le poids important que joue la tendance passée dans la prévision du changement.

A cette erreur de caractère systématique, s'ajoutent deux autres sources d'écart aléatoire, dont l'importance ne dépend pas seulement de l'agent, mais aussi de la nature des phénomènes auxquels il est confronté. La première est due à ce que la prévision tient compte entre autres d'un certain nombre de facteurs dont l'effet aura été mal analysé : leur influence n'aura pas été celle que l'on pensait, leur jeu aura été différent de ce qui était prévu, ou encore, ils n'auront pas joué du tout. Parallèlement, et on en arrive là à la deuxième sorte d'aléas, le prévisionniste aura omis d'intégrer certains faits, soit par erreur de sa part, soit que ces faits aient été matériel-

lement imprévisibles. Mais leur influence se fera quand même jour dans la réalité qui apparaîtra ultérieurement.

On voit ainsi que ces deux dernières erreurs à caractère aléatoire dépendent certes pour une part de la qualité de l'agent, de son flair et de son intuition, mais pour une autre part elles lui échappent, elles sont liées à la nature même de l'objet de la prévision.

Le schéma à deux erreurs proposées n'intervient là que comme cadre, comme moyen d'analyse; il est en lui-même indépendant des phénomènes de sous-estimation des changements ou d'extrapolation du passé; il permet simplement de les mettre correctement en évidence, de les mesurer plus exactement. Sa cohérence logique et les preuves, bien qu'incomplètes, qui lui sont attachées conduisent à penser qu'il peut être assez général, tout au moins en ce qui concerne les prévisions à court terme, et qu'il pourrait servir de support à des analyses plus raffinées; il laisse supposer en tout cas, que le biais systématique de prévision est mal rendu (et en général exagéré) par la simple analyse de régression, et que l'erreur de prévision est d'une nature moins simple qu'on aurait pu l'imaginer a priori.

2) L'utilisation des prévisions pour les décisions de production à court terme

On vient de voir comment les agents économiques fondaient leurs prévisions inconditionnelles; le but du présent paragraphe est d'examiner sur un exemple particulier par quels chemins, à partir de ces données de base, ils élaborent leurs décisions, comment ils organisent l'ensemble de leur action, comment ils la projettent d'abord, comment ensuite ils la modifient au fur et à mesure des événements; on ne dispose évidemment que de peu de données couvrant la totalité de l'activité d'un agent; celles-ci ne peuvent guère être trouvées que par l'intermédiaire des résultats des tests industriels de conjoncture, et c'est pourquoi, afin de pouvoir confronter les hypothèses aux faits, nous nous attacherons au comportement à court terme des chefs d'entreprises.

Pour cela, un schéma de référence est nécessaire; il sera tiré des enseignements de la théorie de la décision. Dans une entreprise, l'ajustement de la production à la demande est décidé à intervalles plus ou moins réguliers; à chacune de ces époques, le chef d'entreprise, ou le chef du service intéressé, se trouvera en possession du niveau de ses stocks, du rythme actuel de la production et des perspectives futures concernant la demande qui lui sera adressée, élaborée suivant les processus décrits précédemment. Il a alors à fixer le rythme futur de sa production. Quels éléments entreront en ligne de compte dans son raisonnement ? Il y a d'abord le fait que cela coûte de changer le rythme de production : il faut modifier les horaires de travail, éventuellement embaucher ou débaucher du personnel, mettre en service de nouvelles machines ou au contraire en arrêter d'autres et

modifier la cadence des approvisionnements; ce sont-là des opérations qui entraînent des frais et qui répétées trop fréquemment risquent sur le plan humain de créer des tensions parmi le personnel, qui supporte mal des modifications incessantes de sa cadence de travail. Mais, allant plus loin, on peut penser qu'il y a une résistance analogue à une trop brusque modification de l'évolution du rythme de production : c'est ainsi que si la production croissait antérieurement au rythme de 10 % l'an, il sera probablement moins facile de la stabiliser que si elle suivait antérieurement un palier ou si elle n'augmentait qu'à la vitesse de 3 % par an. Naturellement, la ligne de moindre résistance se trouve dans le prolongement de la tendance antérieure, de même que quand on lâche un objet, il évolue d'abord tangentiellement à la courbe que l'on vient de lui faire décrire; plusieurs motifs peuvent être invoqués pour cela, mais ils se ramènent tous à l'idée qu'un changement dans le rythme de production est une opération progressive, qui, pour se dérouler normalement, prend du temps : il faut un certain délai pour établir et réaliser un plan d'augmentation des horaires, qui ne se propageront pas immédiatement sur l'ensemble de l'entreprise; le rythme imprimé aux premiers stades de fabrication tendra, tel une sorte d'onde, à se propager jusqu'aux derniers stades, à la vitesse d'avancement des produits en cours.

Mais, contrebalançant ces deux facteurs, qui inciteraient l'entrepreneur à maintenir sa production stable, intervient l'effet des stocks : ceux-ci coûtent chers et sont une menace pour la trésorerie de l'entreprise quand ils sont trop importants; ils ne peuvent non plus sans danger descendre en dessous d'un certain minimum, au-delà duquel l'entreprise pourrait se trouver empêchée de satisfaire à de nouvelles commandes imprévues, et perdrait ainsi éventuellement une partie de sa clientèle. Ce facteur, lui, incitera le chef d'entreprise à moduler le plus exactement possible sa production sur la demande.

Ainsi, conduit pour la bonne marche de son usine à modifier le moins possible, et le moins brusquement possible, son rythme de fabrication, poussé au contraire par sa fonction commerciale à s'adapter au plus près à la demande pour garder des stocks stables, l'entrepreneur s'efforcera de trouver un juste milieu entre ces deux tendances contradictoires.

Voyons de plus près, sur un modèle très élémentaire, comment ceci peut se passer; nous utiliserons ici le cadre d'une analyse par période, la période étant l'intervalle du temps concret qui sépare deux dates successives d'établissement de plan; en fait, la plupart du temps, la planification à court terme s'effectue de la manière suivante : dans le cadre de plans à deux ou trois ans d'échéance qui fixent une ligne de conduite générale, les plans à court terme sont établis à intervalles plus rapprochés, par exemple tous les trois mois et à l'intérieur de ces intervalles des décisions nécessitées par les réalités viennent les infléchir dans un sens ou dans l'autre. Il n'est

donc pas absurde de penser que les plans à court terme sont valables pour une durée comprise entre une semaine et quelques mois et que cette durée reste stable dans le temps, tout au moins pour les entreprises d'une certaine importance et bien organisées.

Au début de la période, le « décideur » connaît le niveau de sa production, le rythme suivant lequel elle vient de varier ainsi que le niveau de sa demande et celui de ses stocks, soient respectivement P_0, ΔP_0, D_0 et S_0. Il a effectué des prévisions de demande $D_1 = D_0 + \Delta D_1$ et il lui faut déterminer le niveau $P_1 = P_0 + \Delta P_1$ de sa production pour la période à venir. Quels « coûts » (1) vont entraîner sur la période une décision de production P_1 quelconque ?

Selon l'analyse précédente ils sont de trois types :

— un coût lié à $| \Delta P_1 |$,

— un coût lié à $| \Delta P_1 - \Delta P_0 |$,

— un coût lié à l'écart entre le stock de la période et le stock idéal S :

$$| S_0 + P_1 - D_1 - S | .$$

Quelles formes auront ces coûts ? On ne peut rien avancer de précis, mais on est quand même incité à penser qu'ils seront plus que proportionnels; c'est ainsi qu'un faible écart entre stock réel et stock souhaité sera tout à fait négligeable, alors qu'un écart plus important peut être catastrophique. Dans ce cas, une expression des coûts qui n'est peut être pas la meilleure, mais qui a l'avantage de bien traduire le sens des phénomènes tout en restant simple, serait la forme quadratique, et le coût total sur la période s'écrirait :

$$C_1 = K_1 (\Delta P_1)^2 + K_2 (\Delta P_1 - \Delta P_0)^2 + K_3 (S_0 + P_0 + \Delta P_1 - D_0 - \Delta D_1 - S)^2$$

K_1, K_2, K_3 étant des constantes.

Nous ne retiendrons pas la condition généralement admise que le niveau des stocks doit être positif. En fait, les symboles S, ΔS, se rapportent, non pas aux stocks stricto-sensu, mais plutôt à l'ensemble « stocks moins délais de livraison ». Ce dernier élément joue en effet dans l'ajustement demande-production, un rôle tout à fait analogue à celui des stocks, mais de sens inverse : un excès de la demande sur la production peut être résorbé soit par diminution des stocks, soit aussi par allongement des délais de livraison. Ceux-ci présentent une corrélation négative très étroite avec les stocks : la quantité S sera donc très convenablement représentée par une fonction linéaire des stocks. C'est pourquoi, dans la suite, pour faire plus rapidement, nous désignerons cette quantité S par le mot « stocks », et S peut évidemment être négatif quand les délais de livraison sont longs, et les stocks faibles.

(1) Le mot « coût » couvrant ici aussi bien des débours réels que des « coûts psychologiques » qui d'ailleurs à la longue se traduiraient également par des pertes en monnaie.

En regard de ces coûts, il faut placer le produit des ventes. Nous supposerons que l'entrepreneur vend à prix constants, hypothèse non absurde quand on raisonne à court terme. Le produit des ventes de la période considérée sera alors :

$$V_1 = K_4 (D_0 + \Delta D_1).$$

L'analyse reste toutefois incomplète car elle ne porte jusqu'ici que sur une seule période; or, la décision à prendre n'est pas isolée, elle prépare la situation dans laquelle se trouvera la firme à la fin de la période, à partir de laquelle il faudra réorienter de nouveau la production pour une nouvelle période. On est évidemment en présence de décisions séquentielles, qu'il faut traiter comme telles, en couvrant un large horizon, théoriquement infini; alors, si C_t est le coût propre à la période t, V_t le chiffre d'affaires correspondant et a le facteur d'actualisation par période, le coût total à prendre en compte sera :

$$C\,T = C_1 + a\,C_2 + \ldots + a^{t-1}\,C_t + \ldots$$

Les coûts successifs C_t ont des expressions analogues à C_1; par exemple, avec des notations évidentes :

$$C_2 = K_1 (\Delta P_2)^2 + K_2 (\Delta P_2 - \Delta P_1)^2 + K_3 (S_1 + P_1 + \Delta P_2 - D_1 - \Delta D_2)^2$$

avec

$$S_1 = S_0 + P_0 - D_0 + \Delta P_1 - \Delta D_1.$$

Le chiffre d'affaire total à prendre en compte sera :

$$V\,T = V_1 + a\,V_2 + \ldots + a^{t-1}\,V_t + \ldots$$

avec, par exemple :

$$V_2 = K_4 (D_1 + \Delta D_2) = K_4 D_2$$

le bénéfice global à rendre maximum est alors :

$$B\,T = V\,T - C\,T.$$

Ici, un point doit retenir l'attention : c'est que ni $C\,T$, ni $V\,T$, ni $B\,T$ ne sont des quantités certaines : elles contiennent en effet les variations ultérieures de la demande ΔD_1, $\Delta D_2 \ldots \Delta D_t \ldots$ qui sont inconnues et sur lesquelles les chefs d'entreprises ne peuvent faire que des prévisions, qu'on pourrait caractériser par une loi de probabilité dotée d'une espérance mathématique et d'une dispersion autour de cette espérance mathématique.

Ces prévisions peuvent d'ailleurs être de deux sortes; tout d'abord, en se fondant sur l'évolution antérieure sur longue période de la demande, qui se caractérise par une moyenne donnée, soit m, et une dispersion σ et éventuellement une autocorrélation, on peut déjà prédire les modifications de la demande pour une époque quelconque : elles se caractériseront par la

moyenne m et la dispersion σ. Mais, si l'on se place à un instant donné, compte tenu des conditions particulières du moment, on pourra faire une prévision différente de la précédente, et meilleure qu'elle, qui sera caractérisée par une moyenne et une dispersion en général différentes de m et de σ. Nous appellerons ces deux types de prévisions, le premier « prévision indifférenciée », le deuxième « prévision spécifique ».

Auquel de ces deux types appartiennent les prévisions de demande faites par les chefs d'entreprises ? Il est normal de penser que les conjectures faites pour un avenir rapproché sont spécifiques, alors que celles relatives à un futur éloigné sont indifférenciées.

Il est toutefois difficile de situer le moment à partir duquel on passe d'un type à l'autre. C'est pourquoi nous examinerons successivement deux hypothèses extrêmes :

1° Celle où jusqu'à une date avancée qui peut être prise comme horizon final, le décideur a effectué des prévisions de demande.

Dans l'expression de $B\ T$, S_0, P_0, D_0 sont connus; ΔD_1, ΔD_2 sont des variables aléatoires connues en moyenne (ces moyennes sont précisément les prévisions de la demande) et ΔP_1, ΔP_2 ... ΔP_T les variations de production à déterminer. Alors, utilisant un résultat général dû à Theil [1], et dans le cas particulier présent tout à fait évident, on sait qu'on peut exprimer la première décision en fonction linéaire des variables (ou de leur espérance mathématique) :

$$\Delta P_1 = \lambda_0 + \lambda_1 \Delta P_0 + \lambda_2 S_0 + \lambda_3 (P_0 - D_0) + \lambda_4 E(\Delta D_1) + \lambda_5 E(\Delta D_2) + \ldots$$

Les λ_1, λ_2 ... étant des paramètres se déduisant des paramètres K_1, K_2, K_3 et a intervenant dans $C\ T$; K_4, S, et plus généralement les V_T n'intervenant pas dans l'expression ΔP_1.

2° L'autre cas extrême sera celui où seule la demande de la première période a fait l'objet d'une prévision; les demandes ultérieures sont inconnues, ou tout au moins on ne sait d'elles que ce qu'en enseigne l'évolution passée sur longue période, soit leur augmentation moyenne d'une période à l'autre m, et la dispersion σ de ces augmentations autour de cette moyenne. Alors, au cours de la première période, on passe d'un état caractérisé par le niveau des stocks S_0, l'écart entre la production et la demande $P_0 - D_0$, la tendance récente de la production ΔP_0, l'évolution probable de la demande $m_1 = E(\Delta D_1)$ et la dispersion σ_1 de cette demande, à un état en fin de période dont les éléments intéressants pour l'évolution future sont S_1, $P_1 - D_1$, ΔP_1.

Soit $W(S_1, P_1 - D_1, \Delta P_1, m, \sigma)$ la somme actualisée des avantages futurs potentiels attachés à ce nouvel état si les décisions ultérieures sont

[1] H. Theil : Note on certainty equivalence in dynamic planning, *Econometrica*, avril 1957.

optimales; dans cette expression, m et σ caractérisent la connaissance qu'on a de ΔD_2 au début de la première période, connaissance qui se réduit à celle de l'évolution passée dans le long terme.

La décision à prendre au début de la première période sera d'après le principe d'optimalité, celle qui rend maximum :

$$(V_1 - C_1) + a\, W\,(S_1, P_1 - D_1, \Delta P_1, m, \sigma)$$

et alors, cette dernière expression sera précisément égale à :

$$W\,(S_0, P_0 - D_0, \Delta P_0, m_1, \sigma_1)$$

on aboutit donc à l'équation fonctionnelle :

$$W\,(S_0, P_0 - D_0, \Delta P_0, m_1, \sigma_1) = \underset{\Delta P_1}{\text{Max}}\ \underset{\Delta D_1}{E}$$

$$[K_4\,(D_0 + \Delta D_1) - K_1\,(\Delta P_1)^2 - K_2\,(\Delta P_1 - \Delta P_0)^2$$
$$- K_3\,(S_0 + P_0 + \Delta P_1 - D_0 - \Delta D_1 - s)^2 + a\, W\,(S_0 + P_0 + \Delta P_1 - D_0$$
$$- \Delta D_1, P_0 + \Delta P_1 - D_0 - \Delta D_1, \Delta P_1, m, \sigma)].$$

On doit en tirer l'expression de la fonction W, puis celle de ΔP_1.

Toutefois, comme on ne s'intéresse ici qu'à la décision optimale ΔP_1, on peut remarquer, en suivant un chemin plus court, bien que non rigoureux, qu'une fonction quadratique doit convenir pour W, et qu'alors l'opération :

$$\underset{\Delta P_1}{\text{Max}}\ \underset{\Delta D_1}{E}\ (V_1 - C_1 + a\, W)$$

conduira pour ΔP_1 à une expression linéaire des différentes variables. On peut alors écrire directement, en notant que σ_1, n'intervient pas dans cette expression :

$$\Delta P_1 = \nu_0 + \nu_1\, \Delta P_0 + \nu_2\, S_0 + \nu_3\,(P_0 - D_0) + \nu_4\, E\,(\Delta D_1)$$

les $\nu_0 \ldots \nu_4$ étant des paramètres constants se déduisant des $K_1 \ldots K_3$, de a_1 et de m et σ, soit une relation du même type que la précédente à ceci près que, évidemment, les prévisions de demandes postérieures à la première période n'y figurent pas (1).

Après avoir analysé la formation des plans de production, voyons maintenant comment ceux-ci se transforment ensuite en réalité. La réponse à cette question dépendra essentiellement du délai qu'on laisse s'écouler entre la formation des plans et l'observation ultérieure de ce qui s'est passé.

Dans le cadre de la période de planification, qui est la durée séparant l'élaboration de deux plans successifs, la réalité c'est la prévision elle-même, puisque celle-ci est en fait un plan qui ne sera pas révisé durant toute cette

(1) En fait, elles y figurent, mais sous la forme des paramètres constants m et σ qui interviennent dans les expressions des constantes $\nu_0 \ldots \nu_4$.

période, et dont l'échec ne peut provenir que d'événements aléatoires, comme par exemple des pannes de machines, dont l'importance est, en tout état de cause, faible. Mais, comme nous l'avons vu, cette période est certainement très courte, et d'ailleurs ne correspond pas obligatoirement à la périodicité selon laquelle sont interrogées les entreprises.

Si les questions posées portent sur un laps de temps plus long que la durée de planification, correspondant par exemple à 6 mois si les plans sont mensuels, c'est-à-dire si l'on demande aux chefs d'entreprises leurs prévisions de production pour 6 mois et que l'on regarde ensuite au bout de 6 mois ce qui s'est passé, alors que ceux-ci établissent leurs plans tous les mois, il est évident que là, les réalisations peuvent notablement différer des prévisions initiales; en effet, la prévision émise ne correspondra à un plan inconditionnel que pour le premier des six mois sur lesquels elle porte; pour les cinq mois suivants, elle correspond à un plan conditionnel et à chaque date d'établissement de plan, c'est-à-dire à chaque mois, ce plan conditionnel sera revisé pour mieux s'adapter à l'évolution nouvelle de la demande; on doit donc s'attendre à ce que plus la période d'observation est longue, plus les réalisations de production s'adaptent à celles de demande et s'éloignent des prévisions de production (1).

Précisons un peu cela, en supposant pour fixer les idées que la période d'observation corresponde à trois périodes de planification. Alors, à l'intérieur de chacune de ces dernières, en supposant que les prévisions de demande sont élaborées pour un avenir plus éloigné que la fin de la période de planification (ce qui correspond à la première des deux hypothèses précédentes), on aura :

$$\Delta P_1 = \lambda_0 + \lambda_1 \Delta P_0 + \lambda_2 S_0 + \lambda_3 (P_0 - P_0) + \\ + \lambda_4 \Delta D_1^{(1)} + \lambda_5 \Delta D_2^{(1)} + \lambda_6 \Delta D_3^{(1)} + \ldots$$

$$\Delta P_2 = \lambda_0 + \lambda_1 \Delta P_1 + \lambda_2 S_1 + \lambda_3 (P_1 - D_1) + \\ + \lambda_4 \Delta D_2^{(2)} + \lambda_5 \Delta D_3^{(2)} + \lambda_6 \Delta D_4^{(2)} + \ldots$$

$$\Delta P_3 = \lambda_0 + \lambda_1 \Delta P_2 + \lambda_2 S_2 + \lambda_3 (P_2 - D_2) + \\ + \lambda_4 \Delta D_3^{(3)} + \lambda_5 \Delta D_4^{(3)} + \lambda_6 \Delta D_5^{(3)} + \ldots$$

dans laquelle les symboles ΔP, S, P, et D ont toujours le même sens que précédemment et où $\Delta D_3^{(2)}$ par exemple représente les perspectives de demande émises pour la 3e période de planification, au début de la 2e période.

(1) Ces hypothèses semblent confirmées par l'examen comparatif des résultats des tests conjoncturels français et allemand, qui diffèrent précisément par la longueur de la période sur laquelle portent les questions : cette période est de 1 mois pour le test allemand, de 4 mois pour l'enquête française.

En additionnant ces trois relations, nous obtenons à gauche l'évolution réelle de la production $R\,P_t$ puisqu'à l'intérieur de chaque période de planification :

Evolution prévue = Evolution réelle

$$R\,P_t = 3\,\lambda_0 + \lambda_1\,(\Delta\,P_0 + \Delta\,P_1 + \Delta\,P_2) + \lambda_2\,(S_0 + S_1 + S_2) +$$
$$+ \lambda_3\,(P_0 + P_1 + P_2 - D_0 - D_1 - D_2) + \lambda_4(\Delta\,D_1^{(1)} + \Delta\,D_2^{(2)} + \Delta\,D_3^{(3)}) +$$
$$+ (\lambda_5\,\Delta\,D_2^{(1)} + \lambda_6\,\Delta\,D_3^{(1)} + \lambda_5\,\Delta\,D_3^{(2)}) + (\lambda_6\,\Delta\,D_4^{(2)} + \lambda_5\,\Delta\,D_4^{(3)} +$$
$$+ \lambda_6\,\Delta\,D_5^{(3)})\ldots$$

La première parenthèse correspond également à l'évolution réelle de la production sur une durée d'égale longueur, mais légèrement décalée vers le passé, la 2e représente le stock moyen au cours de la période, et la 3e l'écart moyen entre production et demande; quant à la 4e, si les chefs d'entreprises n'ont pas été trop mauvais prévisionnistes pour la demande, elle doit être proche de l'évolution réelle de la demande et ce, d'autant plus qu'il y aura eu plus de période de planification au cours de la durée envisagée. La 5e parenthèse qui a pour expression :

$$(\lambda_5\,\Delta\,D_2^{(1)} + \lambda_6\,\Delta\,D_3^{(1)} + \lambda_5\,\Delta\,D_3^{(2)})$$

représente des prévisions de demande effectuées à l'intérieur de la période de planification pour des dates également situées à l'intérieur de cette période; elle ne doit pas non plus être très éloignée de l'évolution réelle de la demande sur la période d'observation.

Quant à la 6e, elle a trait à des prévisions effectuées vers la fin de la période d'observation et relatives à des époques situées en dehors de celle-ci.

On voit ainsi que, si l'on observe les phénomènes sur une longue échelle de temps, les réalisations de production seront mal reliées aux perspectives initiales car les plans que ces dernières impliquaient auront eu largement le temps d'être plusieurs fois modifiés; les réalisations de production trouveront leur origine essentiellement dans l'évolution antérieure de la production, dans l'évolution immédiate de la demande, dans le niveau moyen des stocks et dans l'écart moyen entre production et demande; enfin, dans les prévisions de demande émises vers la fin de la période d'observation pour les époques ultérieures.

Il est maintenant nécessaire de confronter aux faits les résultats théoriques qui viennent d'être déduits de la réflexion a priori; nous nous fonderons pour cela sur le résultats des enquêtes de conjoncture industrielle françaises (1).

(1) A cette occasion, nous exprimons notre gratitude à M. Dumontier, Professeur d'Economie à l'Ecole Polytechnique, Directeur du Laboratoire d'Econométrie, organisme dans le cadre duquel ces travaux ont été effectués, ainsi qu'à M. Méraud, Directeur Scientifique du Laboratoire d'Econométrie qui nous a donné la libre disposition des statistiques du test industriel français et n'a cessé de nous guider par ses conseils avertis.

Rappelons que celles-ci, lancées tous les quatre mois par l'I.N.S.E.E., comportent pour ce qui nous intéresse, des questions sur :

— La demande : tendances passées et tendances prévues.
— La production : tendances passée et tendances prévues.
— Les stocks : tendance passéeéet opinion sur le niveau actuel.

Les réponses possibles à ces questions sont qualitatives : « augmentation », « stabilité » ou « diminution » pour tout ce qui se rapporte à des tendances; « inférieur à la normale », « normal », « supérieur à la normale » en ce qui concerne le niveau des stocks.

De ces réponses qualitatives, on tire un indicateur quantitatif, le solde, différence entre le pourcentage de réponses optimistes et celui des réponses pessimistes. On dispose ainsi pour différentes branches des soldes suivants relatifs au quadrimestre t :

$b\ (P\ D_t)$, soldes des perspectives de demandes émises en début de période.
$b\ (R\ D_t)$, soldes des réalisations de demande constatées en fin de période.
$b\ (P\ P_t)$, soldes des perspectives de production émises en début de période.
$b\ (R\ P_t)$, soldes des réalisations de production constatées en fin de période.
$b\ (R\ S_t)$, soldes des réalisations de stocks constatées en fin de période.
$b\ (O\ S_t)$, soldes des opinions sur le niveau des stocks au début de la période t.

Rappelons enfin, comme l'a montré J. Méraud [1], que ces soldes constituent une représentation correcte des variations relatives (ou des niveaux) des grandeurs en cause.

Comment en termes de soldes traduire les relations trouvées pour la formation des plans de production ? Il faut pour cela effectuer un certain nombre d'approximations; tout d'abord, sur la longueur de la période : le test ne fournit d'informations que pour les périodes de quatre mois; il est évident que c'est une durée largement supérieure à celle de la planification à court terme de la plupart des entreprises; on peut néanmoins penser (tout au moins souhaiter) que, quand les entrepreneurs répondent à l'enquête, ils organisent leurs réponses aux différentes questions comme s'ils avaient à établir un plan de production pour quatre mois; sous cet angle, et avec cette restriction, le test peut renseigner sur le comportement des chefs d'entreprises. Ensuite, si l'on dispose bien des prévisions de demandes pour les quatre mois à venir, qui correspondent à ce que nous avons appelé ΔD_1, l'enquête ne fournit aucun renseignement sur les prévisions de demandes plus lointaines, qui correspondraient aux $\Delta D_2 \ldots \Delta D_t$ de la première hypothèse; nous nous en tiendrons donc par la force des choses à la deuxième hypothèse qui ne fait pas intervenir ces quantités et qui, rappelons-le, s'écrit :

$$\Delta P_1 = \nu_0 + \nu_1 \Delta P_0 + \nu_2 S_0 + \nu_3 (P_0 - D_0) + \nu_4 (\Delta D_1).$$

[1] J. Méraud : Quelques méthodes de prévision à court terme, *Cahiers de l'I.S.E.A.*

Les quantités ΔP_0, ΔP_1 et ΔD_1 seront traduites par les soldes de perspectives de production et de demande.

Mais, si le test fournit, par l'intermédiaire des réponses à la question, « vos stocks sont-ils normaux, inférieurs ou supérieurs à la normale ? » un indicateur du niveau des stocks, il ne comporte aucun renseignement direct sur les niveaux comparés de la production et de la demande qui interviennent par le terme $P_0 - D_0$. Nous approcherons cette différence pour le biais de la question sur la tendance récente des stocks; en effet, l'évolution des stocks est proportionnelle à l'écart niveau de la production-niveau de la demande.

On a ainsi la correspondance suivante entre les données théoriques précédentes, et les différents résumés de l'enquête auprès des chefs d'entreprises :

ΔD_1	$b\ (P\ D_t)$
ΔP_1	$b\ (P\ P_t)$
ΔP_0	$b\ (R\ P_{t-1})$
$P_0 - D_0$	$b\ (R\ S_{t-1})$
S_0	$b\ (O\ S_t)$

L'égalité s'écrit, dans ces conditions :

$$b\ (P\ P_t) = a_0 + a_1\ b\ (R\ P_{t-1}) + a_2\ b\ (O\ S_t) + a_3\ b\ (R\ S_t) + a_4\ b\ (P\ D_t).$$

La relation expliquant l'évolution réelle ultérieure de la production qu'on traduira par $b\ (R\ P_t)$, faisait intervenir sous forme linéaire :

— L'évolution passée de cette même production	$b\ (R\ P_{t-1})$
— L'évolution récente de la demande	$b\ (R\ D_t)$
— Le niveau moyen des stocks au cours de la période	$b\ (O\ S_{t-1})$
— L'écart moyen entre production et demande	$b\ (R\ S_t)$
— Les prévisions de demande émises vers la fin de la période pour les époques ultérieures qu'on traduira d'une manière approchée par	$b\ (P\ D_{t+1})$

elle s'écrira alors :

$$b\ (R\ P_t) = c_0 + c_1\ b\ (R\ P_{t-1}) + c_2\ b\ (R\ D_t) + c_3\ b\ (O\ S_{t+1}) + \\ + c_4\ b\ (R\ S_t) + c_5\ b\ (P\ D_{t+1}).$$

Les données utilisées ne partent que de février 1960, date à partir de laquelle le libellé des questions dans l'enquête a présenté une stabilité suffisante, et s'arrêtent en juin 1965; pour chacune des différentes branches d'activité, il n'y a donc que 17 observations, soit un nombre relativement faible eu égard à celui des variables explicatives retenues. C'est pourquoi il a été jugé bon de grouper ensemble, dans un même ajustement, certaines branches d'activité présentant des similarités structurelles notoires, ce qui

augmente d'autant le nombre d'observations. Finalement, les calculs ont été effectués pour :

	Nombre d'observations
— L'industrie française dans son ensemble	17
— La production des métaux	17
— Le groupement : industries du bois - industries du papier-carton	$17 \times 2 = 34$
— Le groupement : industries alimentaires - industries chimiques	$17 \times 2 = 34$
— Le groupement : textiles - industries de l'habillement - industries des peaux et cuirs	$17 \times 3 = 51$

La méthode d'estimation utilisée, celle des moindres carrés, conduit aux résultats figurés dans le tableau ci-contre.

Ces résultats appellent un certain nombre de commentaires :

Tout d'abord, l'accord global obtenu est satisfaisant : les coefficients de corrélations multiples sont très significatifs; en outre, ils sont nettement plus forts quand on se place au niveau de l'ensemble des activités industrielles, que pour chacune des branches envisagées. Ceci est très encourageant : on sait, en effet que quand une loi est vraie, elle apparaît d'autant mieux suivie qu'on se place à un niveau d'agrégation plus élevé, qui atténue l'effet des facteurs contingents.

Par contre, les coefficients de régression sont assez variables d'une branche à l'autre et ont des écarts-type élevés, mais ceci est normal en raison des multiples quasi-collinéarités affectant les diverses variables explicatives.

On remarquera en particulier que les variables explicatives de stocks ne jouent qu'un rôle assez faible et variable d'un secteur à l'autre. Ceci ne doit pas surprendre : le solde $b\ (O\ S_t)$ a été introduit pour représenter le niveau des stocks; or, il résume les réponses à une question concernant, non ce niveau proprement dit, mais l'opinion des chefs d'entreprises sur ce niveau; cette opinion peut en différer, notamment en raison de la conjoncture qui fera apparaître un même niveau comme trop faible ou trop élevé suivant qu'on se trouve en période de « boom » ou de récession. Quant au solde $b\ (R\ S_t)$, il est destiné à traduire l'écart entre la production et la demande, et pour plusieurs raisons, il ne peut en être qu'un piètre résumé; d'abord, la tendance des stocks est liée, non pas à l'écart production-demande, mais à l'écart production-livraison et il y a entre la demande et les livraisons une certaine différence due à l'existence de délais de livraisons; ensuite, même s'il y a incontestablement une relation d'ordre comptable entre stocks, productions et livraisons, il est difficile d'admettre que celle-ci sera

Branches ou groupements de Branches	Ajustement expliquant la formation des prévisions de production $b(PP_t) = a_0 + a_1 b(RP_{t-1}) + a_2 b(OS_t) + a_3 b(RS_t) + a_4 b(PD_t)$					Ajustements expliquant les réalisations de productions ultérieures $b(RP_t) = c_0 + c_1 b(RP_{t-1}) + c_2 b(RD_t) + c_3 b(OS_{t+1}) + c_4 b(RS_t) + c_5 b(PD_{t+1})$					
	Coeff. de corrélation multiple	a_1	a_2	a_3	a_4	Coeff. de corrélation multiple	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5
Alimentaires Chimie	0,81	+ 0,59 (0,22)	+ 0,14 (0,17)	— 0,02 (0,13)	+ 0,58 (0,25)	0,91	+ 0,44 (0,13)	+ 0,18 (0,12)	— 0,28 (0,11)	— 0,04 (0,09)	+ 0,48 (0,15)
Bois - Papier Carton	0,82	— 0,07 (0,13)	— 0,15 (0,17)	— 0,14 (0,12)	+ 0,56 (0,11)	0,92	+ 0,78 (0,17)	+ 0,29 (0,10)	+ 0,38 (0,22)	— 0,35 (0,13)	+ 0,18 (0,13)
Textile Habillement Peaux et Cuirs	0,95	+ 0,12 (0,07)	— 0,22 (0,11)	— 0,08 (0,06)	+ 0,52 (0,06)	0,91	+ 0,29 (0,20)	+ 0,38 (0,16)	— 0,57 (0,28)	+ 0,15 (0,13)	+ 0,10 (0,18)
Production des métaux	0,87	+ 0,64 (0,24)	+ 0,12 (0,68)	+ 0,51 (0,42)	+ 0,37 (0,32)	0,94	+ 0,42 (0,30)	+ 0,94 (0,33)	- 0,36 (0,62)	— 0,28 (0,36)	— 0,56 (0,47)
Ensemble des activités industrielles	0,98	+ 0,19 (0,10)	— 0,06 (0,18)	+ 0,05 (0,20)	+ 0,77 (0,09)	0,98	+ 0,56 (0,31)	+ 0,50 (0,20)	— 0,21 (0,29)	— 0,15 (0,30)	+ 0,04 (0,18)

Nota — On a indiqué entre parenthèses l'écart-type de chaque coefficient.

traduite fidèlement par des indications aussi qualitatives et subjectives que le sont les réponses aux tests; enfin, rappelons que pour l'explication des plans de production, ce qui intervient, c'est l'écart production-demande au moment de l'élaboration du plan; il faudrait pour le saisir la tendance instantanée des stocks, et non leur évolution sur quatre mois que symbolise $b\ (R\ S_t)$.

Dans l'explication de la formation des plans de production, comme dans celle de la réalité constatée ultérieurement, on trouve que les tendances antérieures de la production jouent un rôle non négligeable comme d'ailleurs respectivement les prévisions de demande et les tendances récentes de celle-ci; tout cela est bien conforme à notre attente.

Par contre, l'effet sur les réalisations de production des prévisions ultérieures de demande $b\ (P\ D_{t+1})$ semble inégal : sensible dans les industries alimentaires et la chimie, il est beaucoup plus faible pour les industries du bois et du papier-carton, à peine perceptible dans le textile, l'habillement et l'industrie du cuir, et nul pour la production des métaux et l'ensemble des activités industrielles.

Cette diversité, de prime abord incohérente, s'éclaire si l'on tient compte de la manière dont la demande est satisfaite dans les différentes branches. Celle-ci peut en effet l'être soit par une livraison immédiate, soit après des délais d'une longueur variable d'une branche à l'autre, mais qui, comme le montre l'expérience, sont à l'intérieur d'une branche assez stable dans le temps. De ce point de vue, les différentes branches d'activité sur lesquelles portent l'étude se caractérisent de la manière suivante :

Importance des délais de livraison mesurée par :	Branches								
	Alimentaire	Chimie	Carton	Bois	Textile	Habillement	Peaux et Cuirs	Production des métaux	Ensemble des activités industrielles
La proportion d'entreprises tenant un carnet de commandes .	16 %	22 %	77 %	78 %	88 %	88 %	91 %	45 %	60 %
La longueur moyenne en semaine du carnet de commandes correspondantes	6	7	7	8	10	10	10	11	17

On s'aperçoit alors que c'est dans les branches où la demande est le plus rapidement satisfaite que la production passée présente le plus de lien avec les prévisions de demande pour les quatre mois futurs. Cette anticipation de la demande future est en effet obligatoire; en raison des délais de livraison courts ou nuls, la production présente servira une demande sur laquelle aucun élément certain n'est connu, et dont il faut bien se faire une idée au moyen de prévisions.

Par contre, quand les délais de livraison sont plus longs, on connaît dès maintenant une partie des livraisons à faire ultérieurement, et il est tentant de ne régler la production que sur ces éléments; dans ces branches les prévisions de demande apparaîtront aux chefs d'entreprises moins essentielles qu'ailleurs et ils en tiendront moins compte, à tort d'ailleurs, semble-t-il.

On voit donc que c'est sous la pression des obligations quotidiennes que les entrepreneurs adoptent un comportement rationnel; dès que celles-ci sont moins fortes, une manière d'agir, apparemment plus prudente, mais en fait moins profitable, se fait jour, qui consiste en somme à attendre et voir venir.

Une confirmation de cela se trouve dans la qualité des prévisions de demande, qui sont plus exactes et moins fondées sur l'extrapolation dans les branches à faibles délais de livraison que dans les autres.

Branches	Longueur moyenne du carnet de commande	Résidu quadratique moyen de l'ajustement $b\,(R\,D_t) = \alpha\, b\,(P\,D_t) + \beta$	Coefficient de corrélation entre $b\,(R\,D_{t-1})$ et $b\,(P\,D_t)$
Alimentaires .	6	7	0,32
Bois	8	10	0,40
Habillement .	10	17	0 89

Résumons maintenant le chemin parcouru : après une analyse, confirmée par l'expérience, des prévisions inconditionnelles qui apparaissent fondées d'une part sur l'expérience passée et d'autre part sur ce que l'intuition laisse entrevoir de l'avenir, nous avons examiné la formation des plans de production, élaborés à partir de ces prévisions et des données présentes, puis vu comment ces plans se traduisaient dans les faits.

Le modèle théorique construit dans ces deux derniers buts n'est pas trop éloigné de la réalité telle qu'elle apparaît à travers les tests conjoncturels; et les divergences que l'on constate sont loin d'être sans intérêt dans la mesure où l'on peut les rattacher à la structure des branches d'activité; ils mettent en évidence des comportements fort compréhensibles, bien qu'ils ne semblent pas conformes à ce qu'un intérêt bien compris réclamerait.

3 - LES PRÉVISIONS ET DÉCISIONS A LONG TERME; LA PROSPECTIVE

Il ne serait pas honnête de clore ce chapitre sans faire mention du long terme; et il est justifié de lui faire une place à part, car il possède en fait des caractéristiques très différentes de tout ce que nous avons vu jusqu'ici.

Toute analyse peut être abordée de deux manières, sous l'angle qualitatif, ou sous l'angle quantitatif. Ce dernier aspect paraît souvent le plus noble : « il n'y a de science que du mesurable » a-t-on souvent dit; et il est de fait que de nombreux phénomènes ne sont véritablement bien connus que quand on a pu les mesurer, les quantifier. En matière de séries temporelles économiques, nous avons pu jusqu'ici en arriver à ce stade, qui paraissait d'ailleurs à la fois possible et nécessaire. Cela tenait essentiellement à ce que l'on enfermait les modèles étudiés dans un cadre structurel étroit, qui définissait, sans souplesse, la nature précise des éléments analysés, et leur imposait une définition fixe dans le temps; c'est ainsi que les prévisions et décisions à court terme se situaient dans un cadre institutionnel donné, et portaient sur des variables dont la signification ne changeait pas; seul leur niveau se modifiait.

En est-il de même quand on traite du long terme ? Est-il actuellement possible de définir des variables numériques permettant d'en rendre compte de façon correcte ? Il est permis d'en douter, et ce doute peut trouver son origine dans la critique des modèles quantitatifs de croissance à long terme, dont certains ont été développés au cours du chapitre 7.

Ces modèles sont essentiellement fondés sur la notion de fonction de production, et la plupart d'entre eux s'appuient sur la célèbre fonction de Cobb Douglas, d'un maniement si commode. Or, on peut, semble-t-il, faire deux reproches à cette fonction de production, reproches d'ailleurs très voisins.

Le premier tient à son pouvoir explicatif; on sait qu'elle vise à séparer les sources de la croissance en trois parts, dont deux sont clairement explicitées, le capital est le travail, et dont la troisième n'est en principe qu'un résidu, une sorte de fourre-tout des autres facteurs, et que l'on nomme, peut-être un peu rapidement, le progrès technique; or les études statistiques visant à mesurer les contributions respectives de ces trois termes, montrent que c'est finalement le troisième, le plus mystérieux, qui a l'importance la plus grande. Sous cet aspect l'apport de la fonction de Cobb Douglas est certain, mais il est en quelque sorte négatif : ce ne sont pas les grandeurs mesurables, capital et travail, qui constituent la source principale de la croissance, c'est le progrès technique, concept mal défini et plus qualitatif que quantitatif.

L'autre reproche tient au principe qui anime les études mentionnées; celles-ci visent à comparer les produits nationaux de deux périodes très éloignées, à les situer sur une même échelle; cette opération a-t-elle un sens ? Comment réduire à un même dénominateur les biens d'il y a cinquante ans et ceux de maintenant, l'automobile de 1900 et celle de 1967 ? C'est le problème classique de l'établissement des indices qui ont un sens quand on s'attache à des instants de temps voisins, mais en perdent de plus en plus au fur et à mesure que les deux termes de la confrontation s'éloignent dans le temps.

C'est que, semble-t-il, le long terme introduit non seulement un changement dans les quantités, mais aussi et surtout une modification de nature, et ce, précisément, par le progrès technique, et aussi par les changements de goût des agents. Et c'est à ces changements dans la nature des phénomènes que doivent essentiellement s'attacher ceux qui s'occupent du long terme. Est-ce à dire que les modèles quantitatifs de croissance sont à rejeter irrémédiablement ? Certes non, ils apportent des enseignements précieux sur certains mécanismes, ils fournissent un guide irremplaçable pour la planification à moyen terme; mais on peut penser que pour le long terme proprement dit, ils sont, seuls, insuffisants et doivent être complétés par des études qui porteraient sur les changements de nature, et non pas seulement sur les changements en quantités.

Ces raisons expliquent le succès de la prospective qui vise à imaginer ce que seront les conditions de l'avenir lointain, et ce, non pas en s'appuyant sur le passé, mais en plongeant directement dans le futur, en recherchant, non pas les ressemblances entre le présent et le futur, mais au contraire les discordances et les modifications.

Ces recherches, qui portent sur les changements de la structure économique, c'est-à-dire des institutions, des attitudes et des relations psychosociologiques, des goûts et désirs des consommateurs, des possibilités de production, objets que l'analyse économique habituelle suppose très généralement constants, peuvent-elles être appréhendées par la voie mathématique ?

L'application des mathématiques à l'évolution des structures reste du domaine de la recherche d'avant-garde; il n'y a d'ailleurs là rien d'étonnant; de telles constructions ne peuvent se développer, semble-t-il, qu'à partir d'une observation sur très longue période; n'est-ce pas par l'étude de plus de vingt siècles d'histoire économique que A. Piettre a pu établir la théorie des trois âges ? Il est certain que, quand il faut recourir à des époques aussi reculées, les informations statistiques deviennent quasi inexistantes et partant toute quantification bien délicate à élaborer.

On pourrait même s'interroger, à la suite de H. Guitton : « Est-il possible de bâtir par la voie mathématique seule une dynamique des institutions ? Tous les modèles connus jusqu'alors supposent que les institutions figurent

parmi les données dont on admet qu'il n'est pas nécessaire de traduire le comportement »; et celui-ci, pourtant, penche ensuite pour l'affirmative, position à laquelle nous nous associons volontiers. Ce n'est pas en effet en raison des mécomptes passés qu'il faut juger d'une science en développement, et les mathématiques, notamment celles du qualitatif, qui ne se proposent pas directement de mesurer mais, plus simplement semble-t-il, d'ordonner, de classer, de relier, ces « mathématiques insolites » en plein défrichement à l'heure actuelle, sont apparemment susceptibles de fournir une formalisation adéquate pour l'étude des structures et de leur évolution.

Ensuite viendra peut-être un jour où à la suite des progrès de la connaissance ces matières pourront à leur tour faire l'objet d'une analyse quantitative, mais ce jour n'est probablement pas proche.

CONCLUSION

Toute discipline nouvelle emprunte initialement ses schémas aux disciplines déjà existantes. C'est ainsi que les premiers ouvrages de génie civil en béton armé se sont vu conférer une structure semblable à celle des ouvrages en acier de la même époque, et ce n'est que plus tard que les ingénieurs ont su découvrir l'originalité propre du nouveau matériau.

De même quand l'économie s'est attaquée à l'étude du temps, elle a trouvé, dans la physique, un corps de doctrine bien établi, aboutissant au déterminisme absolu tel qu'il apparaît au XIXe siècle avec le développement de la mécanique rationnelle. Il était donc normal qu'elle se fonde sur ces principes, et nous avons vu dans la première partie l'avantage qu'il y avait alors à se servir des mêmes outils mathématiques que l'ingénieur et le physicien, outils parmi lesquels les systèmes linéaires tiennent une place de choix.

Ensuite, les probabilités et la statistique ont fait leur apparition et ont bientôt envahi toutes les branches de la connaissance humaine; la science économique n'a pas échappé à la règle : aux erreurs dans la mesure des grandeurs, s'y ajoute l'incertitude fondamentale de lois qui traduisent en général des comportements humains; et la deuxième partie a montré tout l'intérêt que pouvait présenter l'introduction du hasard en général et des processus aléatoires en particulier.

L'analyse reste cependant à ce stade trop mécanique; parfaite pour reproduire l'évolution d'objets inertes, elle est insuffisante quand on veut rendre compte d'actions caractérisées par la poursuite d'un but, l'existence d'une finalité. Ces derniers facteurs ont été introduits en dernier lieu sur les bases de la théorie de la décision. Celle-ci, dont la richesse ne saurait être mise en cause, apparaît souvent bien abstraite et théorique; les préceptes en sont d'une telle rigueur, d'une telle rigidité, qu'il est nécessaire, si l'on veut la transposer du plan normatif au plan explicatif, de l'amender, d'y faire la part de ce qui peut apparaître contingent, irrationnel, et n'est au fond qu'humain.

Les trois stades ainsi dégagés ne s'opposent d'ailleurs pas; ils ne se détruisent pas l'un l'autre, ils se complètent au contraire par enrichissement mutuel, à tel point que la classification précédente est dans une large mesure artificielle.

Ainsi, l'étude des modèles déterministes conduit à considérer ceux-ci comme des mécanismes transformant un « input » donné en un « output »,

parfaitement déterminé par l'input et la structure du modèle; il suffit alors de supposer que l'input présente un caractère probabiliste, et l'output apparaîtra comme un processus aléatoire : c'est une transposition de cette nature qui mène à la théorie des chocs erratiques, examinée au cours du chapitre 4. De même, la théorie de la décision nous oblige à préfigurer un futur incertain et introduit tout naturellement le hasard dans ses analyses, comme on l'a vu au chapitre 8; quant aux relations qu'elle met en évidence, on les traitera par les méthodes de l'une ou l'autre des deux premières parties suivant qu'elles sont déterministes ou non : certains modèles de croissance conduisent à une relation de récurrence; alors que l'analyse des adaptations à court terme de la production effectuée au chapitre précédent a fourni des expressions dont la validité a été testée par les méthodes statiques.

Il ne faudrait certes pas croire que tout est dit. Les développements qui précèdent l'auront bien montré, espérons-le. Sans prétendre aucunement être une somme exhaustive des connaissances actuelles sur le sujet traité, ils visent à réaliser une synthèse, à faire le point, et en particulier à définir les thèmes mal défrichés, à dégager les directions inexplorées, qui, comme on l'a vu, sont nombreuses, et à mettre en évidence les lacunes les plus criantes. Ces dernières sont d'ailleurs de deux ordres différents : on souffre d'abord, sur de nombreux sujets de l'absence de formalisations théoriques adéquates; mais aussi, et c'est peut-être là le plus grave, on manque cruellement d'informations statistiques; à quoi sert de bâtir de belles théories si l'on est dans l'incapacité de juger leur validité; ou de proposer, à partir de calculs savants, des règles d'actions précises aux responsables économiques, si les bases mêmes de ces calculs manquent de fondement.

Mais, malgré tout, il se dégage une conception du temps économique, bien différente de celle à laquelle consuisent les sciences exactes, où le découpage en passé, présent et futur conduit à faire concourir tout le passé à l'explication du présent et du futur.

En économie, le passé n'est pas parfaitement connu, la mémoire n'existe qu'en raison de son contraire, l'oubli; et quand on remonte le temps à rebours, après une période dont nous avons une conscience exacte, on entre dans une zone dont notre connaissance est de plus en plus vague et s'estompe peu à peu pour finalement sombrer dans l'oubli.

Le futur se présente de manière similaire; l'avenir proche est presque certain; ensuite, on rencontre ce qui n'est que probable, et finalement on rentre dans ce qui n'est même plus susceptible de conjecture, dans l'incertain.

Le temps économique est donc en quelque sorte un halo qui entoure l'instant présent, et devient de plus en plus flou à mesure qu'on s'en éloigne; encore faudrait-il ajouter que ce halo est bien souvent décentré, en ce sens que le présent n'est pas parfaitement connu mais fait en général partie du domaine des hypothèses, la certitude n'existant que pour le passé récent,

comme le savent bien ceux qui ont quelque peu pratiqué l'analyse conjoncturelle. Notre univers temporel réside tout entier dans ce halo, qui filtre le réel et le reproduit à la mesure de notre esprit; un passé déformé et amputé se combine à un ensemble de souhaits et d'intentions, qui le transforment en une image inachevée du futur où se préfigure notre action. L'introduction du temps n'ajoute pas une dimension mais deux à notre monde : à chaque instant physique est attaché un axe de temps virtuel le long duquel se placent, non les faits réels, mais la conscience que nous en avons.

***

Ces considérations sont bien sommaires et montrent par là même l'étendue du domaine qui reste à explorer en matière de chroniques économiques.

Mais on peut se demander si, de toute façon le temps ne restera pas toujours un sujet de trouble pour l'esprit humain : d'une part, il blesse notre soif d'absolu, et cela explique le succès en philosophie comme en économie des visions sur l'état stationnaire, où l'histoire est en quelque sorte abolie et se fige.

Mais d'un autre côté, il imprègne toute notre vie et nos schémas de pensée qui ne peuvent se concevoir sans lui; et c'est dans cette contradiction qu'il faut probablement trouver l'origine de nos difficultés à en prendre une vue complète.

***

ANNEXE I

Quelques éléments pour l'étude mathématique des systèmes linéaires

1. GÉNÉRALITÉS

On ne fera là qu'une présentation très intuitive et fort peu rigoureuse des systèmes linéaires, dont une analyse exacte nécessiterait le recours à des théories mathématiques plus élaborées, en particulier à la théorie des distributions, qui leur confèrerait une unité qu'on ne retrouvera pas ici.

Les systèmes linéaires sont ceux qui transforment une grandeur évoluant dans le temps $F(t)$ en une autre grandeur $G(t)$:

$$G(t) = T * F(t)$$

la transformation T ayant les deux propriétés essentielles :

1) Si $$T * F(\theta) = G(\theta)$$

alors $$T * F(t - \theta) = G(t - \theta)$$

(commutativité avec les translations dans le temps).

2) Si $$T * f_1(t) = g_1(t)$$

et $$T * f_2(t) = g_2(t)$$

alors $$T(a f_1(t) + b f_2(t)) = a g_1(t) + b g_2(t)$$

Deux types importants de transformation T sont :

1) la dérivation $T_1 = \dfrac{d}{dt}$

2) l'intégration $T_2 = \displaystyle\int_0^\infty p(t - \tau) \ldots d\tau$

La dérivation s'introduit tout naturellement dans une loi économique. C'est ainsi que l'investissement tel que le fournit la comptabilité nationale apparaît comme l'accroissement de capital au cours de l'unité de temps annuelle :

$$I = \Delta C = \frac{\Delta C}{\Delta T}.$$

On peut de même définir un taux d'investissement instantané $i(t) = \frac{dC}{dt}$, par passage à la limite; et :

$$T_1(C) = \frac{dC}{dt} = i(t).$$

L'opération d'intégration T_2 apparaît notamment quand on exprime des décalages entre grandeurs économiques : supposons qu'à une variation du revenu par rapport à un niveau d'équilibre donné, de durée très courte Δt, mais d'amplitude très intense $\frac{1}{\Delta t}$, corresponde une consommation $\gamma(t)$, ayant, pour fixer les idées, l'allure figurée sur le schéma joint.

Il sera facile, à partir de l'hypothèse de linéarité de la loi qui gouverne la consommation, de déterminer l'évolution $c(t)$ de la consommation si le revenu connaît une évolution $r(t)$ donnée, à partir de l'instant initial; scindons le temps en périodes très courtes $\Delta(t)$ à l'intérieur desquelles le revenu est à peu près constant; pour chacune d'elles on détermine l'évolution de la consommation provoquée par la portion de revenu qui y est apparue; ainsi, la tranche de revenu enregistrée à l'époque θ, $r(\theta)$, entraîne une consommation qui sera à l'instant T :

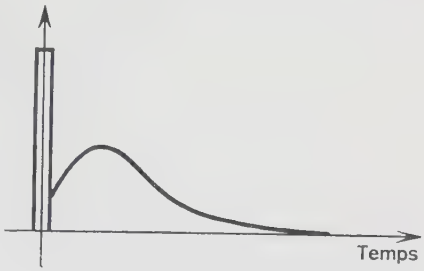

FIG. A-1.

$$\frac{\gamma(T-\theta)}{1/\Delta\theta} r(\theta) = \gamma(T-\theta)\, r(\theta)\, \Delta(\theta).$$

L'ensemble de ces tranches induit une consommation à l'instant t :

$$c(t) = \sum_{\theta < t} \gamma(t-\theta)\, r(\theta)\, \Delta(\theta)$$

et par passage à la limite :

$$c(t) = \int_{-\infty}^{t} \gamma(t-\theta)\, r(\theta)\, d\theta = \int_{0}^{\infty} \gamma(\theta)\, r(t-\theta)\, d\theta.$$

Ainsi, chaque loi économique se traduira par une égalité faisant intervenir des intégrales du type indiqué et des dérivées; et un modèle, combinaison d'un certain nombre de lois, sera d'un point de vue mathématique caractérisé par un système de telles équations, autant d'équations qu'il y a de quantités dont l'évolution est inconnue ; mais ces quantités interviendront en général à l'intérieur d'intégrale ou par leur dérivée; par exemple :

$$\frac{dx}{dt} = \int_{0}^{\infty} q(\theta)\, y(t-\theta)\, d\theta$$

$$y(t) = \int_{0}^{\infty} s(\theta)\, \frac{dx(t-\theta)}{dt}\, d\theta$$

dans lequel q et s sont des fonctions connues, et x et y des quantités dont on cherche l'évolution. Ces systèmes d'équations, qui diffèrent sensiblement des systèmes numériques habituels, peuvent toutefois s'y ramener par l'intermédiaire de la transformation de Laplace.

2 - LA TRANSFORMÉE DE LAPLACE

La transformée de Laplace d'une fonction $f(t)$, nulle pour $t < 0$, est l'intégrale $\overline{f(p)} = \mathcal{L} f(t)$, définie par :

$$\overline{f(p)} = \int_0^\infty f(t)\, e^{-pt}\, dt.$$

Elle possède les propriétés suivantes, faciles à établir d'après les règles du calcul intégral :

1° $$\mathcal{L} \frac{df(t)}{dt} = p\, \mathcal{L} f(t) - f(0).$$

2° si $$G(t) = \int_0^\infty q(t-\tau)\, F(\tau)\, d\tau$$

$$\overline{G(p)} = \mathcal{L}\, G(t) = \mathcal{L}\, q(t) \times \mathcal{L}\, F(t) = \overline{q(p)}\, \overline{f(p)}.$$

3° La transformée de Laplace d'une impulsion unité, c'est-à-dire d'une modification à l'instant t, de durée très brève ε, mais de forte intensité $\frac{1}{\varepsilon}$, par rapport au repos, impulsion notée $\delta(t)$, est :

$$\overline{\delta(p)} = \mathcal{L}\, \delta(t) = e^{-tp}.$$

4° On peut donner un sens à la « dérivée » $\delta'(t)$ qu'on peut se représenter comme la succession très rapprochée de deux impulsions de signes contraires, et pour $t = 0$:

$$\mathcal{L}\, \delta'(t) = p.$$

5° De même, les dérivées successives de $\delta(t)$ auront comme transformée de Laplace pour $t = 0$:

$$\mathcal{L}\, \delta^{(m)}(t) = p^m.$$

On voit que cette transformation va modifier sensiblement le problème à résoudre; en l'appliquant à chacune des relations du système, on aboutira à des équations numériques d'un type habituel.

Ainsi, dans le cas du système hypothétique présenté plus haut, elle permet d'écrire :

$$p\, \overline{x(p)} - x(0) = \overline{q(p)}\, \overline{y(p)}$$

$$\overline{y(p)} = \overline{s(p)}\, [p\, \overline{x(p)} - x(0)]$$

soit :

$$\overline{x(p)}\, [p - p\, \overline{s(p)}\, \overline{q(p)}] = x(0) - \overline{s(p)}\, x(0)$$

ou $$\overline{x(p)} = \frac{x(0)\, [1 - \overline{s(p)}]}{p\, [1 - \overline{s(p)}\, \overline{q(p)}]}$$

et $$\overline{y(p)} = \overline{s(p)} \times x(0) \times \left[\frac{1 - \overline{s(p)}}{p\, (1 - \overline{s(p)}\, \overline{q(p)})} - 1 \right].$$

Une table des transformées de Laplace permet, connaissant $s(t)$ et $q(t)$, de trouver $\overline{s(p)}$ et $\overline{q(p)}$, puis, ayant calculé $\overline{x(p)}$ et $\overline{y(p)}$, de trouver $x(t)$ et $y(t)$ à condition qu'on se soit fixé $x(0)$, la valeur initiale de $x(t)$.

Si le système n'avait comporté qu'une seule égalité, par exemple :

$$y(t) = \int_0^\infty s(t-\theta)\,\frac{du(\theta)}{d\theta}\,d\theta$$

dans laquelle $u(t)$ est l'évolution connue d'une certaine grandeur, alors on aurait pu, d'une certaine manière, considérer cette grandeur comme un « input » que le système transforme en « output » $y(t)$ par la relation :

$$\underset{u(t)}{\text{input}} \rightarrow \text{système} \rightarrow \underset{y(t)}{\text{output}}$$

et on aurait pu écrire :

$$\overline{y(p)} = p\,\overline{s(p)}\left[\overline{u(p)} - \frac{u(0)}{p}\right].$$

Sous cette forme, on voit qu'on obtient $\overline{y(p)}$ en multipliant $u(p) - \dfrac{u(0)}{p}$, qui dépend de l'input, par la fonction $p\,\overline{s(p)}$ qui, elle, ne dépend que de la structure du système considéré et le caractérise donc complètement. Cette propriété est très générale; à chaque système peut être associée une telle fonction, appelée fonction de transfert; elle possède la propriété fondamentale qu'à un input sinusoïdal à amplitude variant exponentiellement, représentable par $e^{p_0 t}$ (1), correspond un output également sinusoïdal :

$$f(p_0)\,e^{p_0 t}$$

où $\overline{F(p)}$ est la fonction de transfert.

En effet, appelons $F(t)$ la fonction telle que :

$$\mathcal{L}\,F(t) = \int_0^\infty e^{-p\theta}\,F(\theta)\,d\theta = \overline{F(p)}$$

alors, si

$$u(t) = e^{p_0 t}$$

de $$\overline{Y(p)} = \overline{F(p)}\,\mathcal{L}\,u(t) = F(p) \times \frac{1}{p - p_0}.$$

on tire $$\mathcal{L}\,Y(t) = \mathcal{L}\int_0^\infty F(\theta)\,e^{-p_0(\theta - t)}\,d\theta$$

soit $$Y(t) = \int_0^\infty F(\theta)\,e^{p_0 t}\,e^{-p_0\theta}\,d\theta = e^{p_0 t}\,\overline{F(p_0)}.$$

(1) En effet, si $p = a + i\,b$, par définition

$$e^{pt} = e^{at}\,e^{ibt} = e^{at}(\cos bt + i \sin bt)$$

et toute évolution de la forme $e^{at}\cos(bt + \varphi)$ peut être représentée par une combinaison de la forme e^{pt}. Par exemple : $e^{at}\cos bt = \frac{1}{2}\left[e^{(a+ib)t} + e^{(a-ib)t}\right]$.

La fonction de transfert d'un système le définissant complètement, on conçoit que sa connaissance permette de savoir si le système est stable ou non; considérons un système soumis au départ à certaines perturbations à caractère impulsionnel, par l'intermédiaire de l'input auquel on aura imposé une certaine variation $u(0)$, une « direction de changement initial » $u'(0)$, etc., le tout représentable par une combinaison d'impulsions

$$u(t) = a_0\,\delta(0) + a_1\,\delta'(0) + \ldots + a_m\,\delta^{(m)}(0)$$

l'input étant ensuite ramené à zéro pour $t > 0$.

La réponse à cet input aura alors pour transformée de Laplace :

$$\overline{Y(p)} = \overline{F(p)}\,\overline{u(p)}$$

or,
$$\overline{u(p)} = a_0 + a_1\,p + \ldots + a_m\,p^m$$

alors,
$$\overline{Y(p)} = \overline{F(p)}\,(a_0 + a_1\,p + \ldots + a_m\,p^m).$$

Un cas fréquent est celui où $\overline{F(p)}$ est une fraction rationnelle et peut donc s'écrire :

$$\overline{F(p)} = \frac{\pi\,(p - \beta_j)}{\pi\,(p - \gamma_j)}.$$

$\overline{Y(p)}$ sera alors :

$$Y(p) = \frac{\pi\,(p - \beta_i)}{\pi\,(p - \gamma_j)}\,[a_0 + a_j\,p + \ldots + a_m\,p^m]$$

et on sait que cette nouvelle fraction rationnelle peut se mettre sous la forme d'un pylone en p et de fractions simples de pôles γ_j .

$$\overline{Y(p)} = \sum_k \alpha_k\,p^k + \sum_j \frac{b_j}{p - \gamma_j}.$$

Les termes en p^k correspondent à des impulsions de $Y(t)$ localisées à l'instant initial sans effet sur la suite de l'évolution; et les autres termes correspondent à des mouvements sinusoïdaux, puisque :

$$\mathcal{L}\,e^{\gamma t} = \frac{1}{p - \gamma}$$

alors, pour $t < 0$:

$$Y(t) = \sum_j b_j\,e^{\gamma_j t}.$$

On voit que l'output sera une combinaison de mouvements sinusoïdaux et exponentiels; et la condition de stabilité sera que tous les γ_j aient leur partie réelle négative; or, ces γ_j sont les racines de l'équation obtenue en également à zéro le dénominateur de la fonction de transfert. On est alors ramené à chercher les conditions pour qu'un polynome P, en l'occurrence le dénominateur de la fonction de transfert, ait toutes ses racines de partie réelle négative.

Ces conditions, trouvées par Routh, s'expriment de la façon suivante :

soit
$$a_0\,x^n + a_1\,x^{n-1} + \ldots + a_n$$

le polynome en question; formons le tableau :

$$\begin{array}{cccccc} a_0 & a_2 & a_4 & \dots & a_{2p} & \dots \\ a_1 & a_3 & a_5 & \dots & a_{2p+1} & \dots \end{array}$$

$$\left(a'_0 = a_2 - \frac{a_0\, a_3}{a_1}\right) \quad \left(a'_2 = a_4 - \frac{a_2\, a_5}{a_3}\right) \dots$$

$$\left(a_1 = a_3 - \frac{a_1\, a'_2}{a'_0}\right) \quad \left(a'_3 = a_5 - \frac{a_3\, a'_4}{a'_2}\right) \dots$$

Toutes les deux lignes, le nombre de terme décroît d'une unité et le tableau affecte ainsi une forme triangulaire, s'épuisant vers le bas au bout d'un certain temps. Les conditions de Routh sont alors :

1) Tous les coefficients $a_0\, a_1 \dots a_n$ du polynome doivent être positifs.

2) Tous les termes de la première colonne du tableau, soit $a_0\, a_1$, $a'_0\, a'_1\, a''_0 \dots$ doivent être positifs.

Elles sont de nature algébrique; des conditions géométriques peuvent également être posées; considérons le plan complexe dans lequel chaque nombre complexe est représenté en abscisse par sa partie réelle, en ordonnée par sa partie imaginaire, les points représentant $1/\overline{F(\mathrm{j}\omega)}$, j étant $\sqrt{-1}$ et ω la pulsation variable; ils constituent une courbe fermée; si celle-ci entoure le point $1 + 0\,\mathrm{j}$, les oscillations seront instables, et stables dans le cas contraire. C'est là le critère de Nyquist; de nature graphique, il est très utilisé par les ingénieurs; en effet, ceux-ci peuvent fréquemment connaître par points la fonction de transfert $\overline{F(p)}$, en utilisant notamment le fait qu'une oscillation $e^{p_0 t}$ est transformée par le système en une autre oscillation $\overline{f(P_0)}\, e^{p_0 t}$, il n'y a alors qu'à porter sur un graphique les points $1/F(\mathrm{j}\omega)$ qu'ils forment.

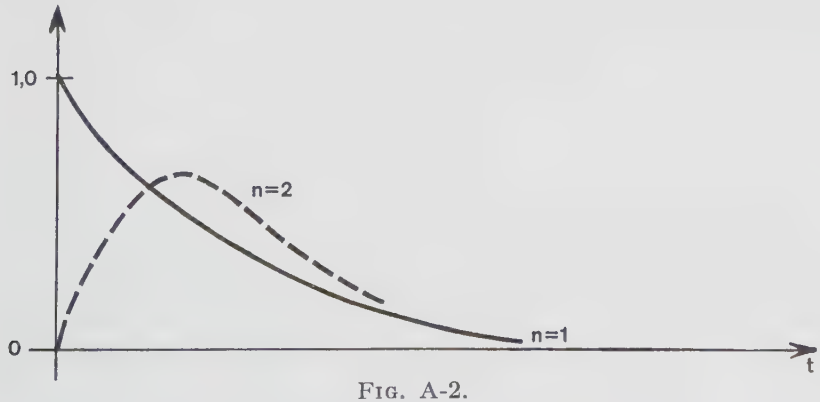

FIG. A-2.

Donnons pour finir quelques exemples de fonctions de transfert courantes :

— Un système qui, à un input $u(t)$, fait correspondre l'output $y(t) = \mathrm{d}u/\mathrm{d}t$, a pour fonction de transfert : $\overline{F(p)} = p$.

— Un système qui, à un input $u(t)$, fait correspondre l'output $y(t) = \int_0^t u(\theta)\, d\theta$, a pour fonction de transfert $\overline{F(p)} = 1/p$.

Un système qui, à un input impulsionnel $\delta(0)$ fait correspondre l'output : $y(t) = \frac{n^n}{T(n-1)!}\left(\frac{t}{T}\right)^{n-1} e^{-nt/T}$

(retard exponentiel d'ordre n), a pour fonction de transfert :

$$F(p) = \left(\frac{1}{p\frac{T}{2} + 1}\right)^n.$$

ANNEXE II

Notes sur la représentation des oscillations sinusoïdales

Une oscillation sinusoïdale peut se représenter indifféremment sous trois formes :

$$x_t = a \sin (\omega t + \varphi) = a \sin \omega (t - t_0)$$

$$x_t = a \sin (2 \pi \lambda t + \varphi) = a \sin 2 \pi \lambda (t - t_0)$$

ou

$$x_t = a \sin \left(2 \frac{\pi}{T} t + \varphi\right) = a \sin 2 \frac{\pi}{T} (t - t_0)$$

a est l'amplitude de l'oscillation. T est sa période, c'est-à-dire l'intervalle de temps à partir duquel elle se répète, T se mesure en unités de temps, en mois par exemple. λ est la fréquence; c'est l'inverse de la période, elle se mesure en cycles par unité de temps; ainsi une oscillation de période $T = 3$ mois aura une fréquence λ de $\frac{1}{3}$ de cycle par mois, c'est-à-dire que pendant l'unité de temps, l'oscillation ne développera qu'un tiers de cycle. ω est la fréquence angulaire; d'après son expression, $\omega = \frac{2 \pi}{T}$ elle se mesure en radian par unité de temps. φ, et t_0 sont des mesures du déphasage, et renseignent sur l'intervalle de temps qui sépare l'origine des temps $t = 0$ de l'instant où l'oscillation x_t prend la valeur zéro; on a entre φ et t_0 la relation évidente

$$\varphi = \omega t_0 = 2 \pi \lambda t_0 = 2 \frac{\pi t_0}{T}$$

si x_t est nul pour $t = 0$, φ est nul, le déphasage est nul; si x_t n'est pas nul pour $t = 0$ il y a un déphasage qui peut s'exprimer en unité de temps — ce sera alors t_0 —, ou en radians — ce sera alors φ, — ou encore en fraction de période — ce sera $\frac{t_0}{T}$.

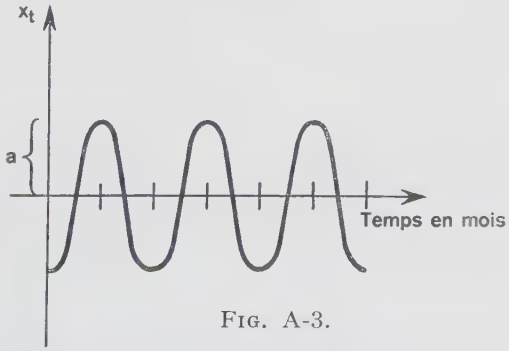

Fig. A-3.

Précisons ces notions sur un exemple : l'oscillation représentée sur la figure ci-contre se répète identique à elle-même tous les deux mois (elle repasse tous les deux mois par son maximum), sa période T est donc deux mois; sa fréquence λ sera de $\frac{1}{2}$ cycle par mois, et sa fréquence angulaire de $2 \pi \times \frac{1}{2} = \pi$ radian par mois.

x_t est nul, non pas à l'instant origine, mais au bout d'un demi-mois; il y a donc un déphasage non nul, qui s'exprime en temps par $t_0 = 0{,}5$ mois, en fraction de période par $\frac{t_0}{T} = \frac{0{,}5}{2} = \frac{1}{4}$ de période, en radian par

$$\varphi = 2\pi \frac{t_0}{T} = 2\pi \times \frac{1}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

Les déphasages sont évidemment additifs, c'est-à-dire que l'on peut parler du déphasage t_0 (ou φ_0) entre deux oscillations de même période et de déphasages respectifs t_1 (ou φ_1) et t_2 (ou φ_2) par rapport à l'origine des temps; on aura $t_0 = t_1 - t_2$ (ou $\varphi_0 = \varphi_1 - \varphi_2$) : les deux oscillations se suivront dans le temps avec le décalage t_0.

On peut exprimer les oscillations sous forme de cosinus, au lieu de sinus :

$$x_t = a \sin(\omega t + \varphi)$$

ou

$$x_t = a \cos\left(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}\right) = a \cos(\omega t + \varphi')$$

en posant

$$\varphi - \frac{\pi}{2} = \varphi'.$$

Enfin on parlera souvent, pour la commodité de l'écriture, d'oscillations complexes, définies par

$$x_t = a\,[\cos(\omega t + \varphi) + i \sin(\omega t + \varphi)]$$

et notées

$$x_t = a\, e^{i(\omega t + \varphi)} \quad (1).$$

Toute oscillation sinusoïdale réelle peut être considérée comme la somme de deux oscillations complexes dont l'une a une fréquence positive et l'autre une « fréquence négative » opposée à la précédente.

Par exemple :

$$x_t = a \cos(\omega t + \varphi)$$

oscillation réelle, est la somme de

$$y_t = \frac{a}{2}\, e^{i(\omega t + \varphi)}$$

et

$$\bar{y}_t = \frac{a}{2}\, e^{-i(\omega t + \varphi)}$$

$$x_t = y_t + \bar{y}_t.$$

(1) On démontre que ces exponentielles imaginaires suivent les mêmes règles de calcul que les exponentielles réelles.

ANNEXE III

Notions d'analyse spectrale

I - GÉNÉRALITÉS

D'après un théorème dû à Cramer, toute série x_t stationnaire au second ordre, c'est-à-dire telle que :

$$E(x_t) = m_1$$
$$E(x^2_t) = m_2$$
$$E(x_t\, x_{t+\theta}) = m(\theta)$$

peut se mettre sous la forme :

$$x_t = \int_{-\pi}^{+\pi} e^{i\,\omega t}\, dX(\omega)$$

où $X(\omega)$ est une variable aléatoire à accroissements non corrélés, c'est-à-dire telle que :

$$E\,[dX(\omega_1)\,\overline{dX(\omega_2)}] = 0 \quad \text{si} \quad \omega_1 \neq \omega_2$$

x_t apparaît alors comme la somme d'une infinité d'oscillations de fréquences ω, dont l'amplitude et la phase définies par $dX(\omega)$, sont aléatoires.

On pose :

$$E\,[dX(\omega)\,\overline{dX(\omega)}] = dF(\omega)$$

et

$$\frac{dF(\omega)}{d\omega} = f(\omega)$$

quand cette quantité existe.

$f(\omega)$ constitue le spectre de la série x_t et indique l'amplitude de l'oscillation de fréquence ω dans cette série.

Le spectre $f(\omega)$ et le corrélogramme $m(\theta)$ sont liés par les relations :

(1) $$m(\theta) = \int_{-\pi}^{+\pi} e^{i\,\theta\omega}\, f(\omega)\, d\omega$$

(2) $$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\theta=0}^{\infty} m_\theta \cos \theta\omega.$$

Si l'on applique à la série x_t un filtre linéaire qui la transforme en une autre série y_t de la forme :

$$y_t = \Sigma\, a_i\, x_{t+i}$$

le spectre $f_y(\omega)$ de la série transformée s'obtiendra en multipliant le spectre $f_x(\omega)$ de la série initiale par une fonction $G(\omega)$ indépendante de la série x_t :

$$f_y(\omega) = G(\omega)\, f_y(\omega)$$

$G(\omega)$, appelée la fonction de transfert du filtre envisagé, caractérise donc ce dernier.

2 - ESTIMATION DES SPECTRES

Il serait tentant d'estimer le spectre $f(\omega)$ en partant de la relation (2) :

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\theta=0}^{\infty} m_\theta \cos \theta\omega$$

et en y remplaçant les coefficients d'autocovariance m_θ par leurs estimations :

$$m'_\theta = \left(1 - \frac{\theta}{n}\right) \sum_{t=1}^{t=n-\theta} x_t\, x_{t+\theta}.$$

On démontre toutefois que l'estimation $\widehat{f}(\omega)$ ainsi obtenue, bien que centrée, ne serait pas convergente, c'est-à-dire que sa variance asymptotique resterait finie quand $n \to \infty$ (1).

C'est pourquoi on a recherché d'autres estimations douées de la précieuse propriété de convergence. On atteint ce but en cherchant à évaluer, non la valeur précise de $f(\omega)$ pour chaque fréquence ω, mais sa valeur moyenne sur des bandes de fréquence égales, dont la juxtaposition recouvre l'intervalle $0 - \pi$ de variation de ω (2). La pondération accordée à chaque fréquence de la bande retenue n'est d'ailleurs pas uniforme, et les fréquences voisines de la bande choisie interviennent également quelque peu. L'importance relative des fréquences entrant dans l'estimation d'une bande $\lambda_1\ \lambda_2$ prend en général, et avec des variantes d'une formule d'estimation à l'autre, l'aspect indiqué sur le graphique ci-dessus.

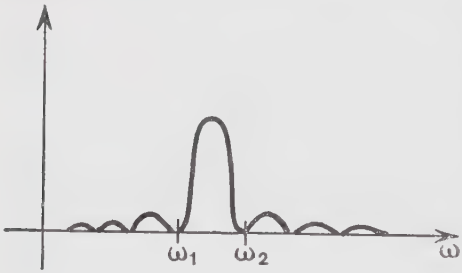

FIG. A-4.

(1) A noter que cette estimation fournirait le périodogramme, statistique dont l'usage a été quelque peu abandonné, en raison précisément de ses trop amples fluctuations.

(2) En effet, seules les fréquences comprises entre 0 et π donnent lieu à estimation, et les fréquences entre π et l'infini n'apparaissent que sous le couvert des premières. Car, une oscillation de fréquence ω_0 semble avoir la même période, quand on l'observe à des intervalles de temps équidistants, que les oscillations de fréquence $\omega_0 + 2\,k\,\pi$ ou $2\,k'\pi - \omega_0$:

$$\cos(\omega_0 + 2\,k\,\pi)\,t = \cos \omega_0\, t$$
$$\cos(2\,k\,\pi - \omega_0)\,t = \cos \omega_0\, t.$$

Une conséquence en est que certaines oscillations de fréquences supérieures à π pourront se traduire sur le spectre par des bosses aux fréquences observables, comprises entre 0 et π; l'interprétation des spectres devra tenir compte de cet élément perturbateur possible.

Différentes formules d'estimations ont été proposées. Citons celles de Parzen :

$$\widehat{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\left[m'_0\, p_0(\omega) + 2\sum_{j=1}^{j=M} p_j(\omega)\, m'_j\right]$$

avec

$$p_j(\omega) = \begin{cases} 1 - 6\,\dfrac{\omega^2}{M^2}\left(1 - \dfrac{\omega}{M}\right) & 0 \leqslant \omega \leqslant \dfrac{M}{2} \\ 2\left(1 - \dfrac{\omega}{M}\right) & \dfrac{M}{2} < \omega \leqslant M \\ 0 & M > \omega \end{cases}$$

et celle de Tuckey-Hanning :

$$\widehat{f}(\omega) = \frac{1}{\pi}\sum_{j=0}^{j=M}\left(1 + \cos\frac{\pi j}{M}\right)(\cos j\,\omega)\, m'_j.$$

Dans ces relations, M représente le nombre de bandes pour lesquelles l'estimation est effectuée et ω prend pour chacune de ces bandes, les valeurs $\frac{K}{2\,M}$, K étant le numéro de la bande, numéro compté à partir de la fréquence 0. Des intervalles de confiance ont été établis pour ces estimations, dans l'hypothèse où le processus de base était autorégressif.

Par exemple, pour l'estimation de Tuckey :

$$\operatorname{var}\widehat{f}(\omega) \simeq \frac{4\,M}{5\,N} f^2(\omega)$$

relations dans laquelle N représente le nombre total d'observations de la série x_t.

Cette formule montre qu'il est nécessaire pour que l'estimation soit assez précise que $\frac{M}{N}$ reste faible. En pratique on ne prendra pas pour $\frac{M}{N}$ une valeur supérieure à $\frac{1}{3}$ et il semble préférable de s'en tenir à $\frac{1}{4}$ ou $\frac{1}{5}$.

L'estimation des spectres présente une dernière difficulté, due à ce que l'estimation sur une bande de fréquence donnée n'est pas pure, mais contaminée par les fréquences voisines, qui rentrent également dans l'estimation, comme le montrait le graphique précédent; cet inconvénient est négligeable si le spectre est assez plat, mais devient d'une importance majeure quand il présente des variations importantes, ce qui sera en général le cas pour les séries présentant un trend et des variations saisonnières accusées. On remédie à cet inconvénient en filtrant au préalable ces séries par une transformation linéaire adoucissant le trend et les variations saisonnières. C'est ainsi que nous avons utilisé dans nos expériences des filtres de la forme :

$$y_t = (x_t - 0{,}95\, x_{t-1}) - 0{,}5\,(x_{t-12} - 0{,}95\, x_{t-13})$$

dont les résultats ont été satisfaisants puisque les spectres estimés des séries filtrées ne variaient que dans les proportions de 1 à 10, règle généralement admise pour que la contamination ne présente pas d'inconvénients, alors que les spectres des séries initiales fluctuent dans des rapports de 1 à 10 000.

Il est ensuite facile à partir du spectre estimé $\widehat{f_y}(\omega)$ de déduire le spectre de la série initiale $\widehat{f_x}(\omega)$. Ce sera :

$$\widehat{f_x}(\omega) = G(\omega) \times \widehat{f_y}(\omega)$$

où $G(\omega)$ est la fonction de transfert, facile à calculer, du filtre.

3 - LES SPECTRES CROISÉS

Considérons deux processus stationnaires x_t et z_t, tels que, en outre :

$$E(x_t \bar{z}_{t+\theta}) = m_c(\theta).$$

Alors, en plus de la décomposition spectrale individuelle de x_t et z_t :

$$x_t = \int_{-\pi}^{+\pi} e^{it\omega} \, dX(\omega)$$

$$z_t = \int_{-\pi}^{+\pi} e^{it\omega} \, dZ(\omega)$$

on a les relations :

$$E[dX(\omega_1) \overline{dZ(\omega_2)}] = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \omega_1 \neq \omega_2 \\ d\,C_r(\omega) & \text{si} \quad \omega_1 = \omega_2 \end{cases}$$

en outre, $d\,C_r(\omega)$ est liée à la fonction $m_c(\theta)$

$$m_c(\theta) = \int e^{i\omega\theta} \, dC_r(\omega)$$

$$\frac{d\,C_r(\omega)}{d\,\omega} = \frac{1}{2\pi} \sum_{\theta=0}^{\infty} m_c(\theta) \cos \theta\omega.$$

La quantité $\dfrac{d\,C_r(\omega)}{d\omega}$ définit le spectre croisé.

On en tire la « cohérence » $C(\omega)$:

$$C(\omega) = \frac{d\,C_r(\omega)\, d\,\overline{C_r(\omega)}}{f_x(\omega)\, \overline{f_y(\omega)}\, d\omega\, d\overline{\omega}}$$

comprise entre 0 et 1, analogue au carré d'un cœfficient de corrélation entre $dX(\omega)$ et $dZ(\omega)$.

Le « gain » $G(\omega)$ défini par :

$$G^2(\omega) = C(\omega) \frac{f_x(\omega)}{f_y(\omega)}$$

analogue au coefficient de régression de $dZ(\omega)$ par rapport à $dX(\omega)$ et la « phase » φ telle que :

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{I\,[dC_r(\omega)]}{R\,[dC_r(\omega)]}$$

qui indique le décalage entre les oscillations de fréquence ω des deux processus.

L'estimation des spectres croisés s'effectue à partir des mêmes formules, et présente les mêmes caractéristiques que celles des spectres simples.

Signalons que, de même que dans le cas de l'analyse temporelle de plus de deux séries on peut définir des corrélations partielles et multiples, de même dans le domaine des fréquences, on peut parler de cohérences, de décalages, de gains partiels et multiples, données par les mêmes relations matricielles que celles qui permettent de calculer les corrélations partielles et multiples à partir des corrélations simples.

Enfin, disons quelques mots de la démodulation complexe. Cette opération vise à déterminer l'évolution qu'aurait connu la série étudiée, si elle avait été composée uniquement d'une bande de fréquence étroite autour d'une fréquence ω_0 choisie à l'avance. Pour atteindre ce but, on multiplie la série x_t successivement par $\cos \omega_0 t$ et par $\sin \omega_0 t$. On obtient ainsi :

$$y'_t = x_t \cos \omega_0 t$$
$$y''_t = x_t \sin \omega_0 t ;$$

on applique ensuite à chacune des deux séries y'_t et y''_t un filtre F qui annule toutes les fréquences, sauf les très basses (ce filtre pourra être par exemple une moyenne mobile de longueur suffisante); on aboutit à deux séries :

$$z'_t = F(y'_t)$$
$$z''_t = F(y''_t)$$

la série « remodulée » est alors :

$$x(t) = z'_t \cos \omega_0 t + z''_t \sin \omega_0 t.$$

ANNEXE IV

Données numériques utilisées au cours du Chapitre VIII

1 - SÉRIES PRÉVISIONS-RÉALISATIONS UTILISÉES AU COURS DE LA SECTION 2, PARAGRAPHE 1

Ces séries se classent en six catégories différentes :

1) Séries de prévisions de demande et de réalisations de demande issues des résultats du test conjoncturel industriel français.

Les chiffres retenus sont les soldes, différence entre le pourcentage de réponses « augmentation » et le pourcentage de réponses « diminution ». Ces soldes, tirés des comptes rendus que l'I.N.S.E.E. publie après chaque enquête, prennent, pour chacune des branches sur lesquelles a porté l'étude, les valeurs suivantes :

Période	Prévisions de demande								
	Alimentaires	Chimie	Bois	Papier Carton	Textile	Habillement	Peaux et Cuirs	Production des métaux	Ensemble de l'industrie
Fév. 59-Mai 59	+ 1	+ 22	+ 15	— 7	— 19	— 20	— 16	— 24	— 14
Mai 59-Nov. 59	+ 15	+ 18	— 7	— 6	+ 15	+ 15	+ 2	+ 51	+ 9
Nov. 59-Fév. 60	+ 4	+ 33	+ 13	+ 55	+ 16	+ 48	+ 23	+ 24	+ 31
Fév. 60-Mai 60	+ 23	+ 41	+ 13	+ 57	— 22	+ 13	+ 14	+ 6	+ 28
Mai 60-Nov. 60	+ 8	+ 11	+ 8	+ 15	— 3	+ 9	+ 8	+ 6	+ 14
Nov. 60-Fév. 61	+ 12	+ 30	+ 24	+ 28	— 5	+ 8	+ 26	— 31	+ 16
Fév. 61-Mai 61	+ 34	+ 25	+ 6	+ 30	+ 11	+ 17	+ 16	+ 4	+ 27
Mai 61-Nov. 61	+ 27	+ 15	+ 3	+ 9	+ 7	+ 19	+ 8	— 34	+ 17
Nov. 61-Fév. 62	+ 25	+ 26	+ 15	+ 37	— 1	+ 30	+ 27	— 35	+ 22
Fév. 62-Mai 62	+ 26	+ 48	+ 25	+ 13	+ 39	+ 14	+ 29	+ 4	+ 37
Mai 62-Nov. 62	+ 14	+ 21	+ 16	— 6	— 14	+ 12	+ 8	— 28	+ 12
Nov. 62-Fév. 63	+ 29	+ 32	+ 25	— 1	+ 12	+ 27	+ 14	— 20	+ 9
Fév. 63-Mai 63	+ 30	+ 38	+ 18	+ 11	+ 26	+ 37	+ 20	— 13	+ 22
Mai 63-Nov. 63	+ 29	+ 26	+ 29	+ 21	+ 29	+ 26	+ 21	+ 6	+ 16
Nov. 63-Fév. 64	+ 21	+ 34	+ 19	+ 15	+ 18	+ 32	+ 34	+ 7	+ 9
Fév. 64-Mai 64	+ 22	+ 45	+ 23	0	+ 8	— 2	+ 21	+ 55	+ 18
Mai 64-Nov. 64	+ 26	+ 28	+ 2	+ 29	— 21	— 13	+ 6	+ 13	+ 2
Nov. 64-Mars 65	+ 26	+ 37	0	— 4	— 21	— 33	— 19	— 29	— 1
Mars 65-Mai 65	+ 16	+ 26	— 7	+ 1	— 10	— 29	— 29	— 35	+ 3

Période	Réalisations de demande								
	Alimentaires	Chimie	Bois	Papier Carton	Textile	Habillement	Peaux et Cuirs	Production des métaux	Ensemble de l'industrie
Fév. 59-Mai 59	— 14	+ 18	— 1	— 3	+ 45	+ 7	+ 20	+ 87	+ 13
Mai 59-Nov. 59	+ 34	+ 25	+ 23	+ 24	+ 39	+ 49	+ 19	+ 57	+ 26
Nov. 59-Fév. 60	— 13	+ 15	+ 13	+ 64	+ 25	0	+ 26	+ 70	+ 26
Fév. 60-Mai 60	+ 7	+ 29	+ 14	+ 60	— 13	+ 3	— 16	+ 21	+ 26
Mai 60-Nov. 60	+ 20	+ 35	+ 38	+ 50	+ 17	+ 25	+ 25	— 17	+ 24
Nov. 60-Fév. 61	+ 14	+ 11	+ 26	+ 50	+ 21	+ 5	+ 19	+ 23	+ 21
Fév. 61-Mai 61	+ 26	+ 10	— 1	— 14	— 12	+ 19	+ 3	— 48	+ 15
Mai 61-Nov. 61	+ 40	+ 3	+ 10	— 12	0	+ 23	+ 16	— 73	+ 13
Nov. 61-Fév. 62	+ 20	+ 38	— 8	— 14	+ 13	+ 9	+ 9	— 43	+ 20
Fév. 62-Mai 62	+ 18	+ 19	+ 9	— 12	— 5	+ 3	— 10	— 4	+ 10
Mai 62-Nov. 62	+ 18	+ 19	+ 47	— 10	+ 41	+ 42	+ 12	— 36	+ 14
Nov. 62-Fév. 63	+ 28	+ 20	+ 14	— 11	+ 54	+ 35	+ 12	— 27	+ 6
Fév. 63-Mai 63	+ 28	+ 41	+ 27	+ 25	+ 45	+ 56	+ 31	— 21	+ 21
Mai 63-Nov. 63	+ 38	+ 35	+ 51	+ 29	+ 49	+ 46	+ 41	— 12	+ 24
Nov. 63-Fév. 64	+ 25	+ 36	+ 17	+ 1	+ 20	+ 11	+ 28	+ 71	+ 17
Fév. 64-Mai 64	+ 21	+ 42	— 6	+ 12	— 8	— 6	+ 6	+ 73	+ 17
Mai 64-Nov. 64	+ 24	+ 34	+ 17	— 24	— 52	— 35	— 15	— 24	— 6
Nov. 64-Mars 65	+ 12	+ 13	— 27	— 59	— 68	— 65	— 61	— 60	— 25
Mars 65-Mai 65	+ 12	+ 15	— 23	— 22	— 21	— 35	— 49	— 53	— 9

2) Séries d'intentions d'achats des ménages aux U.S.A.

Il s'agit de séries de prévisions et de réalisations annuelles d'achats de biens durables des ménages aux U.S.A. sur la période 1947-1955, obtenues à partir d'enquêtes de la « Consumers Union » des U.S.A. (Source : « The quality and Economic significance of Business Anticipations Data »). Achats à prix constants; base 100 l'année précédente :

Période	Prévisions			Réalisations		
	Automobiles	Biens ménagers	Enssmble des biens durables	Automobiles	Biens ménagers	Ensemble des biens duables
Juil. 47-Juil. 48	80	69	75	—	—	—
Juil. 48-Juil. 49	85	103	92	110	93	102
Nov. 49-Nov. 50	115	134	125	134	121	128
Oct. 50-Oct. 51	99	87	93	92	88	90
Août 51-Août 52	53	71	60	82	89	86
Juil. 52-Juil. 53	117	102	110	115	108	112
Oct. 53-Oct. 54	—	—	—	104	105	105
Oct. 54-Oct. 55	000	000	000	000	000	000

3) **Séries de prévisions de trafic ferroviaire de marchandises aux U.S.A.** entre les deux guerres, par les organismes professionnels d'affréteurs. Tous les trois mois, chaque affréteur se voyait interrogé sur le niveau qu'atteindraient d'ici trois mois les chargements qu'il allait faire, ce niveau était défini par rapport à celui de la même époque de l'année précédente; une autre question portait sur le niveau actuel comparé à celui d'il y a un an. Les séries prennent les valeurs suivantes : (source « Quality and economic significance of business anticipation data », p. 233).

	Prévisions	Réalisations		Prévisions	Réalisations
1928 :			1934 :		
I	—	—	I	1,107	1,347
II	1,040	0,986	II	1,148	1,173
III	1,056	1,003	III	1,058	0,955
IV	1,056	1,056	IV	1,039	1,006
1929 :			1935 :		
I	1,059	1,039	I	1,055	1,061
II	1,956	1,108	II	1,058	0,995
III	1,044	1,058	III	1,082	1,105
IV	1,038	0,947	IV	1,129	1,258
1930 :			1936 :		
I	0,975	0,931	I	1,110	1,116
II	0,966	0,847	II	1,111	1,233
III	0,923	0,765	III	1,095	1,249
IV	0,927	0,871	IV	1,118	1,231
1931 :			1937 :		
I	0,916	0,747	I	1,135	1,228
II	0,935	0,763	II	1,116	1,142
III	0,921	0,748	III	1,093	1,082
IV	0,921	0,729	IV	1,048	0,863
1932 :			1938 :		
I	0,928	0,652	I	0,878	0,738
II	0,869	0,633	II	0,816	0,699
III	0,843	0,657	III	0,792	0,749
IV	0,910	0,802	IV	0,976	0,976
1933 :			1939 :		
I	0,951	0,840	I	1,126	1,120
II	0,923	1,045	II	1,134	1,161
III	1,116	1,297	III	1,084	1,162
IV	1,149	1,149	IV	1,119	1,223

4) Séries prévisions-réalisations de demande dans divers commerces du secteur des peaux et cuirs d'après le test conjoncturel allemand organisé par l'I.F.O.

Ce test présente la particularité d'être mensuel; il a lieu 12 fois par an, et à chaque fois, les questions, en prévision comme en réalisation, portent sur un mois. La période analysée va de 1951 à 1953; les soldes, tirés de l'ouvrage de H. Theil « Economic Forecast and policy » (p. 140) sont les suivants :

Période	Prévisions				Réalisations			
	Grossistes en peaux	Grossistes en cuirs	Grossistes en chaussures	Détaillants en chaussures	Grossistes en peaux	Grossistes en cuirs	Grossistes en chaussures	Détaillants en chaussures
1951 :								
J.	—	—	—	— 83	+ 51	+ 83	— 47	— 59
F.	+ 33	+ 16	+ 37	— 17	— 39	— 77	— 17	— 84
M.	0	— 23	+ 25	+ 79	— 15	— 85	0	+ 42
A.	— 43	— 47	0	+ 54	— 100	— 88	— 19	— 46
M.	— 67	— 35	+ 40	+ 65	— 59	— 69	— 29	+ 61
J.	+ 32	— 8	— 35	— 12	— 33	+ 2	— 41	— 64
J.	+ 22	— 9	— 60	— 78	— 53	— 59	— 66	— 54
A.	— 19	+ 29	— 38	— 37	— 38	+ 4	— 27	— 50
S.	+ 61	+ 68	+ 57	0	+ 51	+ 53	+ 47	— 36
O.	+ 61	+ 67	+ 50	+ 65	+ 63	+ 62	+ 59	+ 60
N.	— 19	+ 28	+ 56	+ 24	+ 7	+ 20	+ 14	0
D.	— 50	— 61	— 35	+ 100	— 25	— 59	+ 30	+ 98
1952 :								
J.	— 30	— 26	— 56	— 90	— 7	+ 11	— 93	— 96
F.	— 25	+ 16	+ 6	— 19	— 82	— 45	— 33	— 83
M.	— 59	+ 25	+ 61	+ 93	— 23	— 53	+ 43	+ 38
A.	— 15	+ 17	+ 47	+ 96	— 57	— 63	+ 62	+ 95
M.	— 72	— 13	— 22	+ 47	— 39	— 44	+ 30	+ 55
J.	+ 8	— 5	— 50	— 58	+ 26	+ 26	— 76	— 90
J.	+ 39	0	— 13	— 27	+ 27	+ 9	+ 41	+ 83
A.	+ 29	+ 65	— 12	— 74	+ 27	+ 24	+ 9	— 82
S.	— 8	+ 56	+ 80	+ 35	+ 15	+ 56	+ 48	+ 44
O.	— 17	+ 36	+ 50	+ 96	+ 9	— 4	+ 77	+ 88
N.	+ 17	+ 29	+ 46	+ 38	+ 41	0	+ 40	+ 81
D.	+ 20	— 20	— 24	+ 86	+ 30	— 26	+ 40	+ 100

Période	Prévisions				Réalisations			
	Grossistes en peaux	Grossistes en cuirs	Grossistes en chaussures	Détaillants en chaussures	Grossistes en peaux	Grossistes en cuirs	Grossistes en chaussures	Détaillants en chaussures
1953 :								
J.	+ 9	+ 9	— 74	— 96	— 9		— 100	— 72
F.	— 33	+ 18	— 62	— 35	22	+ 5	+ 19	— 80
M.	+ 1	+ 50	+ 90	+ 98	+ 8	— 48	+ 64	+ 98
A.	— 9	+ 39	+ 68	+ 62	0	+ 5	— 4	+ 41
M.	— 26	+ 2	+ 59	+ 83	— 8	— 59	+ 4	+ 81
J.	+ 9	— 22	— 40	— 60	+ 26	— 40	— 49	83
J.	— 19	+ 21	— 51	+ 29	— 27	+ 9	— 25	+ 58
A.	+ 41	+ 61	+ 8	— 73	+ 12	+ 48	+ 44	67
S.	+ 50	+ 88	+ 85	+ 47	+ 14	+ 49	+ 77	+ 19
O.	+ 12	+ 60	+ 84	+ 90	+ 14	+ 26	— 7	+ 88
N.	+ 5	+ 8	+ 56	+ 76	—		—	—
D.	—	—	—	—	—		—	—

5) Prévisions sur le Produit national aux U.S.A. Ce sont des prévisions effectuées par différents organismes économiques sur l'évolution du Produit national pour l'année à venir. Les données numériques sont issues de V. Zarnowitz : « An evaluation of short term forecasts of Aggregate Economic Activity in the United States ».

Année	Produit national réel	Prévisions des organismes							
		A	B	C	D	E	F	G	H
1953	367,2	—	360,0	—	—	348,2	361,0	355,2	—
1954	357,2	347,0	368,0	—	—	359,2	352,0	362,4	348,5
1955	387,2	361,7	370,0	—	—	361,4	361,1	377,6	364,5
1956	412,4	401,0	402,0	—	403,7	392,3	406,0	405,9	400,2
1957	434,4	428,0	430,0	—	427,4	—	427,5	435,4	429,0
1958	437,7	439,5	449,0	435,4	438,7	—	433,3	442,1	438,8
1959	479,5	470,9	475,0	470,4	462,5	—	475,0	482,8	462,6
1960	503,2	509,9	509,0	511,7	511,8	508,5	510,0	513,9	508,8
1961	521,3	511,3	514,0	505,0	501,5	511,0	508,8	523,1	512,3
1962	553,9	563,2	566,0	566,3	554,5	558,5	565,0	566,8	560,2
1963	585,0	567,8	567,0	527,7	565,8	565,0	576,0	593,4	569,4

6) Prévisions relatives à l'évolution d'une année sur l'autre de l'investissement global aux U.S.A.

Ces prévisions, faites annuellement au cours de la période 56-63 par deux organismes d'études économiques différents, sont issues du même article de V. Sarnowitz, qui donne les caractéristiques des ajustements prévisions-réalisations correspondants :

	Organisme A	Organisme B
Corrélations Prévisions-réalisations	0,674	0,918
Ecart-type des réalisations	3,52	3,96
Ecart-type des prévisions	3,70	4,02

2 - SÉRIES UTILISÉES AU COURS DE LA SECTION 2, § 2

Il s'agit des réponses aux enquêtes auprès des chefs d'entreprises français sur la période février 1960-mai 1965.

Les « soldes » des variables suivantes ont été utilisés :

PD Prévision de demande
RD Réalisaion de demande
PP Prévision de production
RP Réalisation de production
RS Réalisation de stocks
OS Opinion sur le niveau des stocks [1].

Ils sont issus des brochures publiées par l'I.N.S.E.E. à l'occasion de chaque enquête. Nous donnons ici à titre d'exemple leur valeur pour l'ensemble des activités industrielles.

Période t	$b(PD_t)$	$b(RD_t)$	$b(PP_t)$	$b(RP_t)$	$b(RS_t)$	$b(OS_t)$
Fév. 60-Mai 60	+ 28	+ 26	+ 30	+ 29	+ 4	+ 9
Mai 60-Nov. 60	+ 14	+ 24	+ 22	+ 26	— 2	+ 7
Nov. 60-Fév. 61	+ 16	+ 21	+ 23	+ 25	+ 15	+ 2
Fév. 61-Mai 61	+ 27	+ 15	+ 27	+ 20	+ 9	+ 7
Mai 61-Nov. 61	+ 17	+ 13	+ 24	+ 20	— 3	+ 7
Nov. 61-Fév. 62	+ 22	+ 20	+ 29	+ 27	+ 15	+ 7
Fév. 62-Mai 62	+ 37	+ 10	+ 39	+ 23	+ 8	+ 8
Mai 62-Nov. 62	+ 12	+ 14	+ 20	+ 25	— 4	+ 18
Nov. 62-Fév. 63	+ 5	+ 6	+ 21	+ 20	+ 16	0
Fév. 63-Mai 63	+ 22	+ 21	+ 28	+ 26	— 9	+ 8
Mai 63-Nov. 63	+ 16	+ 24	+ 23	+ 31	— 6	+ 2
Nov. 63-Fév. 64	+ 9	+ 17	+ 25	+ 30	+ 10	— 1
Fév. 64-Mai 64	+ 18	+ 17	+ 22	+ 28	+ 10	— 3
Mai 64-Nov. 64	+ 2	— 6	+ 14	+ 10	+ 6	+ 9
Nov. 64-Fév. 65	— 1	— 25	+ 7	— 12	+ 35	+ 16
Fév. 65-Mai 65	+ 3	— 9	+ 5	— 3	+ 10	+ 29

[1] Cette question n'est posée que depuis février 1960, ce qui explique que la période d'étude ne soit pas remontée plus avant dans le temps.

BIBLIOGRAPHIE

ABRAHAM (C.) et THÉDIE (J.) : Le prix d'une vie humaine dans les décisions économiques, *Revue Française de Recherche opérationnelle*, 1960.

ADELMAN (I.) : Long cycles : fact or artifact, *American economie review*, Vol. LV, 1965.

ALLEN (R.D.G.) : *Mathematical economics*, Macmillan, Londres, 1956.

BACHELET (D.) et MORLAT (G.) : *Modèle à deux aléas pour des chroniques économiques*, Communication au premier Congrès Mondial d'Econométrie, Rome, 1965.

BARBUT (M.) et FOURGEAUD (C.) : *Eléments d'analyse mathématique des chroniques*, Document ronéotypé, publication commune de l'Association Cournot et du Centre de Mathématique Sociale et de statistique de l'Ecole Pratique des Hautes Etudes (6e Section); Paris, 1964.

BARRE (R.) : *La période dans l'analyse économique*, Sedes, Paris, 1950.

BARRÈRE (A.) : *Théorie économique et impulsion keynesienne*, Dalloz, Paris, 1952.

BECKENBACH (E.F.) : *Modern mathematics for the engineer*, McGraw-Hill, New-York, 1956.

BELLMANN (R.) et DREYFUS (S.E.) : *La programmation dynamique et ses applications*, Dunod, Paris, 1965.

BERGE (C.) et GOUILA-HOURI (A.) : *Programmes, jeux et réseaux de transports*, Dunod, Paris, 1962.

BERGSTOM (A.R.) : Nonrecursive models as discrete approximations to systems of stochastic differential equations, *Econometrica*, Vol. 34, N° 1, 1966.

BLANC-LAPIERRE (A.) et FORTET (R.) : *Théorie des fonctions aléatoires*, Masson, Paris, 1953.

BOSSONS (J.) et MODIGLIANI (F.) : On the reasonableness of regressive expectations, *M.I.T. School of industrial management working paper*, n° 10-63, 1963.

BOZON (C.) et CHARMEIL (C.) : La programmation des investissements sur une liaison, *Revue Générale des Routes et des Aérodromes*, Paris, 1965.

CASS (D.) : Optimal Growth in an aggregative model of capital accumulation, *Econometrica*, Vol. 34, N° 4, 1966.

CHARMEIL (C.) : *Essai sur le rôle de l'investissement dans la croissance économique*, Thèse, Paris 1967.

DORFMAN (R.), SAMUELSON (P.A.) et SOLOW (R.M.) : *Programmation linéaire et gestion économique*, Dunod, Paris, 1963.

DUCROS (B.) : *Fluctuations et Croissance économiques*, Les cours du Droit, Paris, 1967.

HICKS (J.R.) : *A Contribution to the theory of the trade cycle*, Clarendon Press, Oxford, 1950.

HICKS (J.R.) : *Capital and Growth*, Clarendon Press, Oxford, 1966.

KALECKI (M.) : « A macrodynamic theory of Business cycles ». *Econometrica*, Vol. 3, 1935.

KAUFMANN (A.) et CRUON (R.) . *La programmation dynamique, gestion scientifique séquentielle* », Dunod, Paris, 1964.

KEMENY (J.G.), SNELL (J.L.) et THOMPSON (G.L.) : *Algèbre moderne et activités humaines*, Dunod, Paris, 1960.

KENDALL (M.G.) : *The advanced theory of statistics*, G. Griffin and C°, London, 1948.

KINSEY (J.) Mc : *Introduction to the theory of games*, McGraw Hill, New York, 1952.

KOOPMANS (T.) : *Statistical inference in dynamic economic models*, J. Wiley and sons, New York, 1950.

KUHN et TUCKER : *Contributions to the theory of games*, Princeton University Press, 1950.

LESOURNE (J.) : *Le calcul économique*, Dunod, Paris, 1964.

LUCE (R.D.) et RAÏFFA (H.) : *Games and decisions*, J. Wiley and sons, New York, 1958.

MALINVAUD (E.) : Capital accumulation and efficient allocation of resources, *Econometrica*, Vol. 21, n° 2, 1953.

MALINVAUD (E.) : Programme d'expansion et taux d'intérêt, *Econometrica*, Vol. 27, n° 2, 1959.

MALINVAUD (E.) : *Méthodes statistiques de l'économétrie*, Dunod, Paris, 1964.

MALINVAUD (E.) : Les croissances optimales, *Cahiers du séminaire d'Econométrie*, n° 8, 1965.

MARCHAL (A.) : *Systèmes et structures économiques*, P.U.F. Collection Themis. Paris, 1959.

MARCHAL (J.) : *Le mécanisme des prix*, Librairie de Médicis, Paris, 3e Edition, 1950.

MASSÉ (P.) : *Le choix des investissements*, Dunod, Paris, 1959.

MASSÉ (P.) : *Le plan ou l'anti-hasard*, Gallimard, Paris, 1965.

MÉRAUD (J.) et TYMEN (A.) : Les variations saisonnières de l'activité économique, *Etude et conjoncture*, avril 1960.

MÉRAUD (J.) : Quelques méthodes de prévision à court terme. *Cahiers de l'I.S.E.A.*, Série AK, n° 1, 1961.

MORGENSTERN (O.) : *On the accuracy of economic observations*, Princeton University Press, 1963.

MORLAT (G.) : Un article de M. J.L. Milnor : les jeux contre la nature, *Econométrie Appliquée*, Archives de l'I.S.E.A. ; L'incertitude et l'action, 1960.

MORLAT (G.) : Modèle pour des chroniques économiques mensuelles, *Revue de Statistique Appliquée*, Vol. 11, n° 2, 1963.

MORLAT (G.) : Statistique et théorie de la décision, *Revue de Statistique Appliquée*, Vol. 12, n° 2, 1964.

NERLOVE (M.) : Spectral analysis of seasonal adjustment procedures, *Econometrica*, Vol. 32, n° 3, 1964.

PHELPS (E.) : The golden rule for accumulation, *American Economic Review*, Vol. 60, n° 4, 1961.

PHILIPS (A.W.) : Stabilisation Policy in a closed economy, *Economic Journal*, Vol. 64, 1954.

PHILIPS (A.W.) : The estimation of parameters in systems of stochastic differential equations, *Biometrika*, Vol. 46, 1959.

PIATIER (A.) : *Statistique et observation économique*; P.U.F. Collection « Themis », Paris, 1961.

PIETTRE (A.) : *Les trois âges de l'économie*, Les éditions ouvrières - Economie et humanisme, Paris, 1955.

QUINET (E.) : Prévision et mesure, *Revue d'Economie Politique*, 1967, n° 6.

ROCARD (Y.) : *Théorie des oscillateurs*, Editions de la Revue Scientifique, Paris, 1941.

ROSENSTHIEL et GHOUILA-HOURI (A.) : *Les choix économiques : décisions séquentielles et simulation*, Dunod, Paris, 1960.

ROUANET (H.) : Etudes de décisions expérimentales et calcul des probabilités, in *La décision*, Colloque du C.N.R.S. - Editions du C.N.R.S., Paris, 1961.

SAMUELSON (P.A.) : *Les fondements de l'analyse économique*, Gauthier-Villars, Paris, 1965.

SAVAGE : *The foundations of statistics*, J. Wiley and sons, New York, 1954.

SCHARTZ (L.) : *Théorie élémentaire des distributions*, C.D.U., Paris, 1960.

SCHWARTZ (L.) : *Cours d'analyse à l'Ecole polytechnique*, 1962-1963.

SHACKLE (G.L.S.) : *Décision, déterminisme et temps*, Dunod, Paris, 1967.

SHISKIN (J.) : *Les signaux avertisseurs des récessions et des reprises*, Gauthier-Villars, Paris, 1964.

SHISKIN (J.) : *Calculateurs électroniques et indicateurs de conjoncture*, Cahier n° 3, I.A.E., Bordeaux.

STORELU (L.) : *L'équilibre et la croissance économiques*, Dunod, Paris, 1967.

SUZUKI (M.) : A spectral analysis of Japanese economic time series since the 1880's, Kyklos, Bâle, 1965.

THEIL (H.) : A note on certainty equivallence in dynamic, *Econometrica*, Vol. 25, n° 2, 1957.

THEIL (H.) : *Economic forecast and policy*, North Holland publishing company, Amsterdam, 1961.

TUSTIN (A.) : *The mecanism of economic systems*, W. Heinemann, Londres, 1953.

ULLMO (J.) : *La pensée scientifique moderne*, Flammarion, Paris, 1958.

VAN GREVELINGHE (G.) : Une fonction de consommation pour la France, document ronéotypé, I.N.S.E.E., 1965.

WHITTLE (P.) : Estimation and information in stationary time series, *Arkiv for Matematik*, 1953.

ZARNOVITZ (V.) : *An evaluation of short-term forecasts of aggregate economic activity in the United States*, Ronéotypé; Communication au Congrès Ciret de Rome; 1965.

The quality and economic significance of business anticipation data, Princeton University Press.

Rapport Particulier *Routes de rase campagne et voirie en milieu urbain* du Ve Plan. Rapporteurs : C. BOZON et C. CHARMEIL, Commissariat Général du Plan, Paris, 1966.

Imprimerie Bayeusaine, 8, rue Royale, Bayeux, 6303 — Dépôt légal n° 5927, 4e trimestre 1968
Imprimé en France

Après des études secondaires à Paris, au lycée Janson de Sailly, Émile QUINET entre en 1955 à l'École polytechnique et en sort dans le corps des Ponts et Chaussées ; pendant ces années d'études, il se sent déjà attiré par l'économie et suit avec succès le cycle de l'Institut d'Études politiques, puis prépare le doctorat ès sciences économiques ; à la sortie de l'École des Ponts et Chaussées il est affecté à un poste technique, à Toulon, où il assure la réalisation de travaux de génie civil pour le compte de la Marine nationale. Il revient à Paris en 1963 au Centre d'économétrie de l'École polytechnique où, sous la direction de MM. DUMONTIER et MERAUD, il participe à des recherches sur la conjoncture industrielle.

Actuellement au Ministère de l'équipement et du logement, il est chargé des études économiques à la Direction des routes : choix des investissements, études de financement, planification à moyen et long terme.

Émile QUINET est l'auteur d'articles sur la prévision et le calcul économique.

Suite du premier rabat

L'étude de séries statistiques diverses permet de comparer les décisions réelles aux décisions optimales théoriques ; en outre, elle éclaire d'un jour nouveau la formation des prévisions économiques et met en évidence certains des mobiles qui président à la prise des décisions de la part des entrepreneurs.

Tout au long de l'ouvrage, l'accent est mis sur la portée pratique des méthodes proposées, par de nombreuses applications à des situations concrètes issues de l'information statistique disponible. En outre, un partage à peu près égal est fait entre l'économie globale et l'économie d'entreprise, tant sur le plan des modèles théoriques que sur celui de leur utilisation pratique, et permet de mettre en évidence l'unité méthodologique qui règne entre ces deux branches apparemment si différentes de la science économique.

Enfin, une bibliographie couvrant le champ des problèmes traités, permettra à chacun d'approfondir la question qui l'intéresse plus spécialement.

DUNOD, ÉDITEUR. PARIS

COLLECTION « FINANCE ET ÉCONOMIE APPLIQUÉE »

MÉTHODES STATISTIQUES DE L'ÉCONOMÉTRIE

PAR

E. MALINVAUD

Directeur de l'École nationale de la statistique
et de l'administration économique
Directeur d'études à l'École pratique des hautes études

648 pages 16 × 25, avec 97 figures. 1964. Relié toile sous jaquette ..... **92** F

PRÉVISIONS ET DÉCISIONS STATISTIQUES DANS L'ENTREPRISE

PAR

J. MOTHES

Ancien élève de l'École polytechnique
Professeur à l'École nationale des mines de Paris

PRÉFACE DE

J. ULLMO

Examinateur à l'École polytechnique

644 pages 16 × 25, avec 173 figures et 25 abaques. 2e *édition*. 1968. Relié toile sous jaquette ..... **98** F

DUNOD ÉDITEUR, 92, RUE BONAPARTE - PARIS-6e - 326-99-15